BOLA UNITARIA EN DIMENSIÓN N

Minutos 8 al 32 de https://www.youtube.com/watch?v=B_Cmzc5I8ro

Imagina un círculo de radio 1 y otro concéntrico de radio 0,999, si juegas a que el dardo que lances caiga dentro del circulo menor, verás que es fácil ganar, pero aumentemos la dimensión, el volumen de la esfera de radio r es 4/3 pi r^3 luego el cociente de los volúmenes de las esferas de radio 1 y 0.999 es

$$0{,}999^3/1^3$$

En dimensión 2 teníamos

$$0{,}999^2/1^2$$

En dimensión N tendremos

$$0{,}999^N/1^N$$

Que para N grande es casi 0, luego en una dimensión grande si a B(1) le quitamos B(0.999) apenas importa, en N grande es mayor la corona sobrante que la bola que quitamos. Esto suena extraño, pero es así, y lo mismo ocurre en cuadrados, cubos, N-cubos, los volúmenes de N-cubos de lado 0,999 son casi cero para N suficientemente grande.

¡Sorprendente! Sencillo y sorprendente. Un desafío a la intuición.

Comentario

No sé para qué se utilizará esto de los n-volúmenes pero como siempre tomamos errores es decir ,si por ejemplo ajustamos a las milésimas, quizás se esté despreciando mucho en medidas de n-volúmenes. Veo que es un problema calcular n-volúmenes con n factores menores de la unidad que se nos harán casi cero, esto puede ser incómodo

Entonces quizás en el uso del big data sea mejor hacer cálculos con los lados es decir los módulos de los diferentes vectores m.dimensionales u, v, w, ... Y de sus diferencias u-v, u -w, v-w..., con estos módulos está también definido el volumen, pero a la hora de hacer cálculos no estamos multiplicando los módulos n veces, no se nos hacen casi cero y tenemos la geometría definida

La geometría de n vectores en IR^m queda definida por los módulos de ellos y sus diferencias y esto es solo un vector de orden n(n+1)/2

Detallo a lo que me estoy refiriendo con tres vectores u, v y w en IR^m pero esto es válido para más vectores

$$\begin{vmatrix} u\cdot u & u\cdot v & u\cdot w \\ v\cdot u & v\cdot v & v\cdot w \\ w\cdot u & w\cdot v & w\cdot w \end{vmatrix}$$

Cada elemento de este determinante viene definido por los módulos de los vectores u, v, w, u-v, u-w y v-w, de modo que con 6 valores está definida la geometría de 3 vectores cada uno con m coordenadas. **Es decir 3m valores resumidos en 6**

En general con n vectores de m coordenadas cada uno, la geometría que definen queda determinada por n·(n+1)/2 valores. El n-volumen queda determinado y ninguno de esos n·(n+1)/2 valores se van a cero si m (la dimensión donde están los vectores) o n grande no se van a cero por n o m ya que el número de factores es solo dos en cada caso.

Juguemos un poco con n=2

RECTA DE REGRESIÓN

$X=(x_1, \dots, x_m)$ $Y=(y_1, \dots, y_m)$ $U=(1, \dots, 1)$ aX+bY=U	$\begin{cases} aX\cdot X + bY\cdot X = U\cdot X \\ a\overline{X} + b\overline{Y} = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a\overline{X^2} + b\overline{XY} = \overline{X} \\ a\overline{X} + b\overline{Y} = 1 \end{cases}$	$a = \dfrac{\begin{vmatrix} \overline{X} & \overline{XY} \\ 1 & \overline{Y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \overline{X^2} & \overline{XY} \\ \overline{X} & \overline{Y} \end{vmatrix}}$ $b = \dfrac{\begin{vmatrix} \overline{X^2} & \overline{X} \\ \overline{X} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \overline{X^2} & \overline{XY} \\ \overline{X} & \overline{Y} \end{vmatrix}}$

Por tanto la pendiente de la recta de regresión de Y/X es -a/b:

$$\frac{\begin{vmatrix} \overline{XY} & \overline{X} \\ \overline{Y} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \overline{X^2} & \overline{X} \\ \overline{X} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\mathrm{Cov(X,Y)}}{\mathrm{Var(X)}}$$

Tomemos las dos ecuaciones que salen de multiplicar aX+bY=U por X y por Y

$X=(x_1, \dots, x_m)$ $Y=(y_1, \dots, y_m)$ $U=(1, \dots, 1)$ aX+bY=U	$\begin{cases} aX\cdot X + bY\cdot X = U\cdot X \\ aX\cdot Y + bY\cdot Y = U\cdot Y \end{cases}$ $\begin{cases} a\overline{X^2} + b\overline{XY} = \overline{X} \\ a\overline{XY} + b\overline{Y^2} = \overline{Y} \end{cases}$	$a = \dfrac{\begin{vmatrix} \overline{X} & \overline{XY} \\ \overline{Y} & \overline{Y^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \overline{X^2} & \overline{XY} \\ \overline{XY} & \overline{Y^2} \end{vmatrix}}$ $b = \dfrac{\begin{vmatrix} \overline{X^2} & \overline{X} \\ \overline{XY} & \overline{Y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \overline{X^2} & \overline{XY} \\ \overline{XY} & \overline{Y^2} \end{vmatrix}}$

Por tanto la pendiente de la recta de regresión de Y/X es -a/b:

$\frac{\begin{vmatrix} \overline{XY} & \overline{X} \\ \overline{Y^2} & \overline{Y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \overline{X^2} & \overline{X} \\ \overline{XY} & \overline{Y} \end{vmatrix}} = \text{(según anterior)} \frac{\mathrm{Cov(X,Y)}}{\mathrm{Var(X)}}$; igualdad cierta si X, Y determinan una recta perfecta.

Si consideramos las tres ecuaciones a la vez resulta que la matriz ampliada del sistema es

$$\begin{vmatrix} u\cdot u & u\cdot v & u\cdot w \\ v\cdot u & v\cdot v & v\cdot w \\ w\cdot u & w\cdot v & w\cdot w \end{vmatrix}$$ siendo u=U, v=X y w=Y

Luego podíamos definir como coeficiente de regresión lineal este determinante, el elemento de volumen de U , X y Y

Si tenemos la matriz 2xm $\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_m \\ y_1 & \dots & y_m \end{pmatrix}$ se pueden considerar dos vectores fila o m vectores columnas, la recta de regresión está determinada por los puntos del plano de esos vectores columna, luego también por los dos vectores fila

En realidad tenemos tres vectores fila en una matriz 3xm

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_m \\ y_1 & \dots & y_m \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Y con sus módulos y productos escalares tenemos la recta de regresión.
Por tanto cuando tenemos n vectores , tomamos 1 más y necesitamos **(n+1)·(n+2)/2 valores.**