# Longitudes de Cuerdas Aleatorias

Si se selecciona al azar una cuerda en un círculo fijo,

¿cuál es la probabilidad de que su longitud supere el radio del círculo?

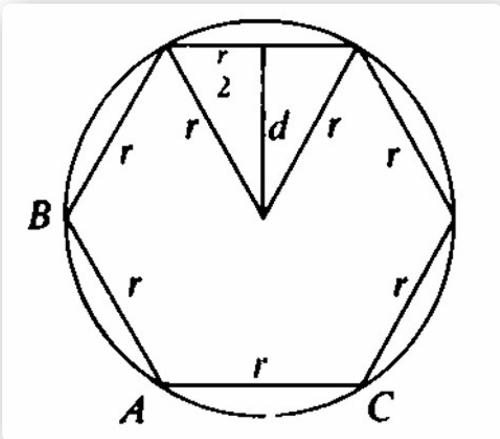
## Algunas Soluciones Plausibles

Hasta que la expresión "al azar" se haga más específica, la pregunta no tiene una respuesta definitiva.

Las tres suposiciones plausibles siguientes, junto con sus tres probabilidades diferentes, ilustran la incertidumbre en la noción de "al azar" que a menudo se encuentra en problemas de probabilidad geométrica.

No podemos garantizar que ninguno de estos resultados coincida con los obtenidos de algún proceso físico que el lector pueda usar para elegir cuerdas al azar, de hecho, el lector puede disfrutar estudiando empíricamente si alguno coincide.

Sea r el radio del círculo.




(a) Supongamos que la distancia de la cuerda desde el centro del círculo está distribuida uniformemente de 0 a r.

Dado que se puede inscribir un hexágono regular de lado en un círculo, para obtener la probabilidad, simplemente encuentre la distancia d desde el centro y divida por el radio.

Tenga en cuenta que d es la altura de un triángulo equilátero de lado r.

Por lo tanto, desde la geometría plana obtenemos

$$d = \sqrt{r^2 - r^2/4} = r\sqrt{3}/2.$$

Consecuentemente, la probabilidad deseada es

$$r\sqrt{3}/2r = \sqrt{3}/2 \approx 0.866.$$

( b ) Supongamos que el punto medio de la cuerda está distribuido uniformemente en el interior del círculo .

Consultando nuevamente la figura , vemos que la cuerda es más larga que el radio cuando el punto medio de la cuerda está a una distancia menor que d del centro . Así, todos los puntos en el círculo de radio d, concéntricos con el círculo original, pueden servir como puntos medios de la cuerda . Su fracción, en relación con el área del círculo original, es

$$\pi d^2 / \pi r^2 = d^2 / r^2 = 0.75 .$$

Esta probbilidad es el cuadrado del resultado que obtuvimos de la suposición ( a ) anterior .

( c ) Si con cada punto de la circunferencia consideramos las cuerdas que están en el arco de 180º a partir de él, tendremos todas las cuerdas. Y con cada punto las cuerdas que son menor que erl radio son las que abarcan menos de 60º, de modo que hay 60º para las que son menores y de 60 a 180º se definen las cuerdas que miden más que el radio, esto da un probabilidad de 2/3.

**Hasta aquí la traducción del libro de Mosteller, problema 25.**

El problema es una versión de la paradoja de Bertrand, en el enlace se puede ver publicado en su libro "Cálculo de probabilidades" (1889).

Después de reflexionar sobre el problema se explica **la conclusión**

Si una probabilidad como (b) da un 75% ( el 100% es el área del círculo), no es lo mismo el 75% del área del círculo que el 75% del radio, el 75% del área del círculo equivale aprox al 86,6% del radio. Si tenemos muchos círculos concéntricos, estos estarán definidos por sus radios o por sus áreas, y el círculo que ocupa en área el 75% del total no tiene un radio igual al 75% del radio total sino que es igual a la raiz(75/100) del radio total. Al definir la probabilidad podemos tomar el cociente de las áreas o de los radios, darán proporciones diferentes.

En estos círculos concéntricos qué medida escogeríamos , ¿la de los radios, la de las áreas, las medidas de los arcos? Ahí está la cuestión. Según la medida que se escoja saldrá una función de distribución distinta, y por tanto una probabilidad diferente en nuestros ejemplos.

Quisiera poner **énfasis en la distinción del azar escogido y la medida de probabilidad tomada,**

En (a) el azar está definido escogiendo aleatoriamente (a, b) donde "a" es un número entre 0 y 1, "b" entre 0 y 2п. Ese es el azar, sus representaciones pueden ser diferentes, y la medida de probabilidad que tomemos también, si con este azar representamos cuerdas y medimos radios, podemos definir los casos de cuerdas mayores que el radio=1 como la medida de ese radio límite ,

raíz(3)/2 ,

que al dividirla entre la medida del radio total nos da la probabilidad "pa" , esto es,

$$pa = \frac{\int_{x=0}^{x=\sqrt{3}/2} dx}{\int_{x=0}^{x=1} dx} = \sqrt{3}/2$$

O podemos medir con el área,

$$pb = \frac{\int_{x=0}^{x=\sqrt{3}/2} d(\pi\, x^2)}{\int_{x=0}^{x=1} d(\pi\, x^2)} = \frac{\int_{x=0}^{x=\sqrt{3}/2} d(\,x^2)}{\int_{x=0}^{x=1} d(\,x^2)} = \frac{3}{4}$$

La variable x en ambos casos es el parámetro "a", el radio, estoy tomando diferentes medidas con el mismo azar y salen proporciones diferentes.

También podemos medir con el arcos(x) es decir, el arco que define el radio,

$$pc = \frac{\int_{x=0}^{x=\sqrt{3}/2} d\; arcos(x)}{\int_{x=0}^{x=1} d\; arcos(x)} = \frac{\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}}{-\frac{\pi}{2}} = 2/3$$

Hemos tomado en (a) diferentes medidas con un mismo azar, los casos (a) y (b) explican probabilidades "pa" y "pb" obtenidas con el mismo azar pero diferentes medidas.

En (c)  no se tomó el mismo azar que en "pc", en (c) tomamos un parámetro "a" entre 0 y п y otro parámetro b entre 0 y 2п, sus valores determinan un arco en la circunferncia. El arco de extremos

(cos b, sen b)  (cos (b+a), sen (b+a))

Para la medida en "p"  tomamos la medida de los arcos, misma medida que en (a) con "pc" pero diferente azar.

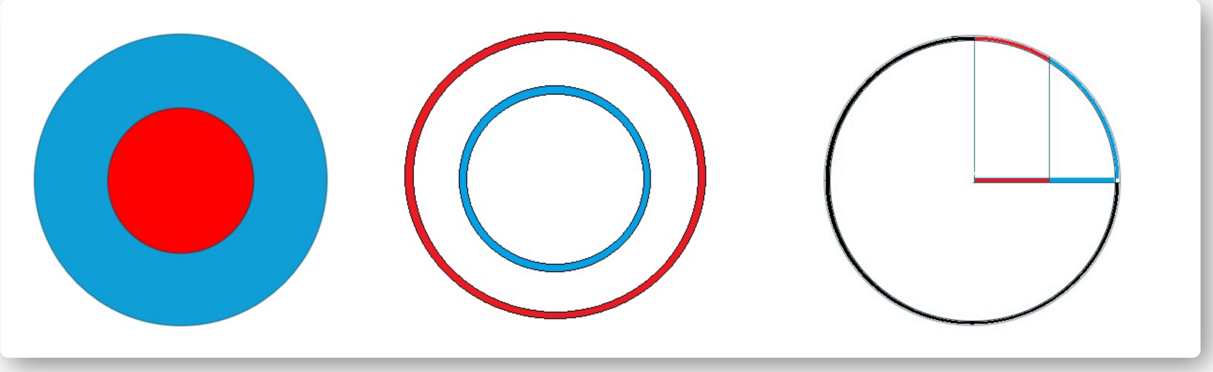
$$p = \frac{\int_{z=0}^{z=2\pi/3} d\,z}{\int_{z=0}^{z=\pi} d\,z} = \frac{2\int_{z=0}^{z=\pi/3} d\,z}{2z{=}\int_{z=0}^{z=\pi/2} d\,z} = \frac{\int_{z=0}^{z=\pi/3} d\,z}{\int_{z=0}^{z=\pi/2} d\,z} = \frac{2}{3}$$

z representa el parámetro "a"entre 0 y п .

Comparando "p" con "pc", la diferencia es el cambio de variable, vemos que **cambiar de azar es solo un cambio de variable,** de x (entre 0 y 1) a z (entre 0 y п) y la probabilidad se conserva, ya que no hemos cambiado de medida.

El cambio de azar es un cambio de variable en la integral eso no daría por si solo valores diferentes, lo que da valores diferentes es la medida a tomar, es decir, las diferenciales en la integral.

Puede descargarse en pdf esta explicación



**Agradecimientos**

El problema es muy interesante. Agradezco al Catedrático de estadística Dr. Cuesta Albertos sus explicaciones, y su paciencia escuchando siempre cualquier comentario. También agradezco las indicaciones del profesor D Pedro Arias Castanedo que nos ha proporcionado este documento de la web (original en inglés).

**Créditos**

Traducción del problema 25 del libro Fifty Challenging Problems in Probability with Solutions, F. Mosteller, Dover, New York, 1965 , MOSTELLER

Vídeo introducción con lumen5.com

Simulación realizada por chatGPT