Correo electrónico: adrory@gmail.com

Resumen La paradoja de Bertrand es un problema fundamental en probabilidad que pone en duda la aplicabilidad del principio de indiferencia al mostrar que puede generar resultados contradictorios, dependiendo del significado asignado a la "aleatoriedad". Jaynes afirmó que los requisitos de simetría (el principio de grupos de transformación) resuelven la paradoja al seleccionar una solución única al problema. Muestro que esto no es cierto y que cada variante obtenida a partir del principio de indiferencia también se puede obtener a partir del principio de grupos de transformación de Jaynes. Esto se debe a que las mismas simetrías se pueden implementar matemáticamente de diferentes formas, dependiendo del procedimiento de selección aleatoria que se utilice. Describo un experimento sencillo que respalda un resultado basado en argumentos de simetría, pero la solución es diferente a la de Jaynes. El método de Jaynes se debe considerar como una herramienta para obtener distribuciones de probabilidad cuando el principio de indiferencia resulta incómodo, pero no puede resolver las ambigüedades inherentes al uso de ese principio y aún depende de definir explícitamente el procedimiento de selección.

Palabras clave Probabilidad · Paradoja de Bertrand · Principio de Indiferencia · Principio de Grupos de Transformación · Jaynes

Fracasos y Usos del Principio de Grupos de Transformación de Jaynes

Alon Drory

la fecha de recepción y aceptación se debe insertar más tarde

1 Introducción

La aplicación de probabilidades en física plantea una serie de difíciles preguntas fundamentales [1]. Entre ellas se encuentra el problema de determinar el procedimiento correcto de "contar" para un caso dado, o equivalentemente, elegir qué distribución de probabilidad utilizar para las variables aleatorias relevantes. Quizás el enfoque más común es utilizar el principio de indiferencia (llamado así por Keynes, y conocido anteriormente como el principio de causa insuficiente):

> Principio de Indiferencia : Si no hay una razón conocida para predecir de nuestro sujeto una alternativa en lugar de otra de varias alternativas, entonces , en relación a dicho conocimiento, las afirmaciones de cada una de estas alternativas tienen una probabilidad igual. [2, p.42]

El principio de indiferencia, de alguna forma u otra, ha sido utilizado exitosamente en innumerables aplicaciones, desde lanzar una moneda y juegos de azar hasta contar configuraciones en la mecánica estadística. Sin embargo, su estatus filosófico y uso adecuado todavía son ampliamente debatidos. Uno de estos debates se origina en el trabajo del matemático Joseph Louis François Bertrand (1822-1900), quien creó una serie de ejemplos que muestran cómo el principio puede llevar a problemas si se aplica sin crítica. Posteriormente denominados 'paradojas', la más famosa de ellas es el problema de la cuerda, que ha sido discutido desde entonces ([4,5,6,7,8]).

Problema de Bertrand : Considera un círculo con un triángulo equilátero inscrito en él. ¿Cuál es la probabilidad de que una cuerda seleccionada al azar sea más larga que el lado del triángulo?

Bertrand demostró que se obtienen (al menos) tres respuestas diferentes según el procedimiento utilizado para seleccionar la cuerda.

B1. Dibuja el triángulo desde el punto que marca uno de los extremos de la cuerda. La cuerda será más larga que el lado del triángulo si está inscrita dentro del

Afeka College of Engineering, Calle Bney-Efraim 218, Tel Aviv, 69107, Israel

ángulo en el vértice. Esto representa un tercio del rango posible para los ángulos entre la cuerda y la tangente en el vértice, $[0, \pi]$. La probabilidad es $1/3$, por lo tanto.

B2. Una cuerda está completamente definida por su punto medio. Si el punto medio está más cerca del centro que la mitad de un radio, la cuerda será más larga que el lado del triángulo. Esto da como resultado una probabilidad de $1/2$.

B3. Todos los puntos medios de las cuerdas más largas que el lado del triángulo deben caer dentro de un área circular alrededor del centro del círculo original, de ancho la mitad del diámetro original. Esta área cubre un cuarto del círculo original y si los puntos medios se eligen al azar en el área del círculo, la probabilidad de que caigan en la región relevante es así $1/4$.

En cada uno de estos casos, aplicamos el principio de indiferencia, pero obtenemos una predicción diferente.

Los enfoques al paradoxo de Bertrand varían. Algunos autores buscan negar que el problema sea realmente un problema [para un ejemplo reciente, ver [9]; para una crítica de esta posición, ver [10]]. Probablemente la actitud más común es demostrar que el problema no está bien planteado, es decir, que confunde varios problemas debido a que "aleatorio" es un término impreciso. Una vez que los diversos problemas se desenredan y se comprenden correctamente, el principio de indiferencia produce una única prescripción para la probabilidad. La presentación clásica de este enfoque es dada por Marinoff [11]. Aunque esta aparentemente era la posición de Bertrand, ha habido cierto debate sobre si esto representa una resolución real del paradoxo [12].

En contraste, otro enfoque afirma que el problema de Bertrand está realmente bien planteado y que tiene una solución única, la multiplicidad de respuestas es solo aparente. El argumento se origina con Poincaré [13], pero el principal defensor de esta posición se considera que es Jaynes [14]. Su afirmación es que se debe extender la "indiferencia" en el principio a cada aspecto que no se especifique en el problema. Por lo tanto, la orientación, el tamaño y la posición del círculo no deberían importar. Jaynes interpreta esto como que la función de distribución de probabilidad (PDF) de las cuerdas debe ser invariante ante cambios en estas propiedades, es decir, invariante bajo un grupo de transformaciones que incluye rotaciones, cambios de escala y traslaciones del círculo. Este es su principio de grupos de transformaciones.

Luego, Jaynes realizó un experimento en el que lanzó pajitas largas a un círculo dibujado en el suelo. Luego se comparó la distribución de las cuerdas generadas por las intersecciones de las pajitas con el círculo con la predicción teórica y se encontró que era consistente con ella. Esta combinación de verificación experimental y justificación teórica ha sido muy atractiva desde entonces, especialmente entre los físicos. La idea de que hay una solución única para el problema de Bertrand que se puede descubrir experimentalmente se ha revisado y ampliado varias veces desde entonces [15,16,17,18,19].

Es ampliamente aceptado que Jaynes demostró que hay una solución única que posee invariancia rotacional, de escala y translacional [7,19,20]. Incluso los autores que rechazan el enfoque de Jaynes parecen estar de acuerdo en que el simetría

El requisito conduce a una solución única, aunque pueden disputar la validez del requisito en sí [11,8].

Mi objetivo aquí es mostrar que no es el caso y que al igual que con el principio de indiferencia, la aplicación del principio de grupos de transformación depende del método de selección de acordes. La implementación de las simetrías resulta no ser única y conduce a diferentes requisitos matemáticos dependiendo del proceso subyacente por el cual uno imagina los acordes aleatorios que se generan. De hecho, contrariamente a la afirmación de Jaynes, cada una de las tres soluciones clásicas del problema de Bertrand (¡y otras adicionales también!) se pueden derivar mediante el principio de grupos de transformación, utilizando las mismas simetrías exactas, es decir, invariancia rotacional, de escala y translacional.

Comienzo por reformular ligeramente el problema de Bertrand en la sección 2 para eliminar algunas críticas a la formulación estándar. Esta versión regularizada se utiliza en el resto del artículo. Reviso la aplicación de Jaynes de su principio de grupos de transformación en la sección 3. En las secciones 4 y 5, luego demuestro que el principio de Jaynes también puede producir las otras dos soluciones de Bertrand. La sección 6 presenta una variación de la primera solución y describe una verificación empírica del resultado. La sección 7 luego discute las implicaciones de estos hechos para las aplicaciones físicas del principio de indiferencia y lo que el principio de Jaynes realmente contribuye al problema.

2 Problema Regularizado de Bertrand

La formulación original de Bertrand ha sido objeto de varias críticas y la validez de sus soluciones ha sido debatida, argumentando que los procedimientos sugeridos no seleccionan una cuerda del conjunto de todas las cuerdas posibles [21], o bien que no seleccionan una cuerda única [12]. Shackel, en particular, elimina la solución propuesta por Bertrand B3, seleccionando al azar el punto medio en el área del círculo, porque si el punto medio resulta ser el centro del círculo, no define una cuerda única. Cualquier diámetro, sin importar su orientación, es una cuerda posible. Shackel argumenta que esto descalifica el procedimiento [1] .

Por otro lado, Rowbottom critica las soluciones de Bertrand al seleccionar acordes de subconjuntos adecuados en lugar del conjunto completo de posibilidades [21]. En su opinión, esto descalifica todas las soluciones propuestas. Admite que se puede reformular el problema para eliminar este problema, pero argumenta que el

1 Sin embargo, es necesario ser justos históricamente con Bertrand. Aunque se ha vuelto estándar buscar la probabilidad de que un acorde sea más largo que el lado del triángulo inscrito, la versión original de Bertrand requería la probabilidad de que fuera más corto. Esto obviamente elimina los diámetros del espacio muestral. Además, también demuestra que las soluciones estándar son válidas , ya que se puede calcular la probabilidad de que un acorde sea más largo que el lado como uno menos la probabilidad de que sea más corto. Cuando se aplica para calcular la probabilidad de que un acorde sea más corto que el lado, el argumento subyacente en B3 es obviamente válido y da como resultado $3/4$, lo que a su vez da como resultado $1/4$ para la probabilidad de que el acorde sea más largo. Esto demuestra que la solución es realmente sólida. Sin embargo, adopto un enfoque diferente aquí para no dejar ninguna duda al respecto.

El problema reformulado es mucho más difícil y las soluciones de Bertrand no son respuestas adecuadas.

Las intenciones históricas de Bertrand no son relevantes aquí, y las críticas pueden ser respondidas reformulando ligeramente la pregunta y las soluciones.
Los aspectos esenciales permanecen inalterados en esta versión regularizada del paradoxo de Bertrand, la solución de Jaynes es prácticamente idéntica y todas las preguntas planteadas siguen presentes. En consecuencia, en este artículo me referiré al problema regularizado y sus soluciones como el paradoxo de Bertrand, sin más especificaciones.

Para eliminar la singularidad en el centro del círculo, reformulemos la pregunta de la siguiente manera:

Problema Regularizado de Bertrand : En un círculo, selecciona al azar una cuerda que no sea un diámetro. ¿Cuál es la probabilidad de que su longitud sea mayor que el lado del triángulo equilátero inscrito en el círculo?

Las versiones regularizadas de las soluciones de Bertrand son las siguientes: **RB1.**

Selecciona al azar un punto en la circunferencia del círculo. A partir de ese punto, selecciona al azar un ángulo para la dirección de la cuerda, excluyendo la dirección del diámetro. Si utilizamos el diámetro que pasa por el punto seleccionado en la circunferencia como el eje polar, estamos seleccionando un ángulo al azar del conjunto $(-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2)$, o equivalentemente del rango $(-\pi/2, \pi/2) - \{0\}$, es decir, excluyendo el ángulo 0 que corresponde al diámetro.
Para un punto dado en la circunferencia, el rango de ángulos que produce una cuerda más larga que el lado del triángulo es $(-\pi/6, 0) \cup (0, \pi/6)$, lo que resulta en una probabilidad de $1/3$. Dado que todos los puntos en la circunferencia son equivalentes, la probabilidad de que cualquier cuerda que no sea un diámetro sea más larga que el lado del triángulo también es de $1/3$ (ver también la sección 5 para una discusión más formal).

RB2. Selecciona al azar un diámetro. Considera el radio que es perpendic- ular al diámetro seleccionado. Selecciona al azar un punto en este radio y traza la cuerda que pasa por él, que también es paralela al diámetro seleccionado. Si la distancia del punto al centro se encuentra en el rango abierto $(0, \mathbf{R/2})$, la cuerda correspondiente será más larga que el lado del triángulo.
Por lo tanto, para cualquier diámetro dado, la probabilidad de seleccionar tal cuerda es $1/2$. Dado que todos los diámetros seleccionados en primer lugar son equivalentes, la probabilidad de cualquier cuerda (que necesariamente es paralela a algún diámetro) que sea más larga que el lado del triángulo también es $1/2$.

RB3. Selecciona al azar un punto dentro del círculo, excluyendo su centro. Cualquier punto seleccionado de esta manera elige una cuerda única de la cual es el punto medio. La cuerda será más larga que el lado del triángulo si el punto seleccionado cae dentro de un círculo central de radio $\mathbf{R}/^2$, excluyendo el centro mismo. La superficie de esta área sigue siendo πR $^2/4$, ya que el punto central excluido tiene superficie cero, y la probabilidad correspondiente para la cuerda apropiada es así $1/4$.

Todos estos métodos seleccionan una sola cuerda, del conjunto de todas las cuerdas posibles que no son diámetros, y todos requieren exactamente dos variables aleatorias para especificar completamente la cuerda. Por lo tanto, todos representan (al menos a priori) aplicaciones igualmente aceptables del principio de indiferencia para la solución del problema regularizado de Bertrand.

Con respecto a este problema regularizado y las soluciones, consideremos ahora los argumentos de Jaynes sobre la corrección única del valor $1 / 2$ como solución del problema. Como se mencionó anteriormente, por concisión seguiré hablando del problema y las soluciones de Bertrand cuando me refiera a las versiones regularizadas de estos. Por la misma razón, no mencionaré cada vez que los diámetros estén excluidos de nuestra selección, a menos que tenga implicaciones directas en el cálculo en cuestión. Especificaré cómo se debe adaptar el análisis de Jaynes al problema regularizado, sin embargo. Como veremos, esto prácticamente no requiere cambios.

3 Solución de Jaynes: Probabilidad $1/2$

Jaynes busca la distribución de probabilidad de las cuerdas que satisface ciertas simetrías del problema. Para hacerlo, necesita seleccionar parámetros matemáticos que caractericen completamente una cuerda. Como veremos más adelante, esto resulta ser un punto crucial. Jaynes elige las coordenadas polares del punto medio de la cuerda, (r, θ), en relación a un origen ubicado en el centro del círculo. f $(\mathrm{r}, \theta)\, dS$ es la probabilidad de tener el punto medio en el área infinitesimal $dS = rdrd\theta$.

Luego, Jaynes aplica su principio de grupos de transformación. En este caso, significa que la función de densidad de probabilidad (PDF) requerida debe ser idéntica para todos los observadores que no están explícitamente diferenciados en la formulación del problema. El problema de Bertrand no tiene restricciones en la orientación, ubicación o escala utilizada por los observadores, por lo tanto, la PDF requerida debe ser simétrica con respecto a las rotaciones, cambios de escala y traslaciones. Tenga en cuenta que las transformaciones se suponen aplicadas a los observadores (o más bien a sus sistemas de coordenadas), no a las cuerdas mismas.

3.1 Simetría Rotacional

Considere dos observadores y permita que el eje polar del observador B se rote en sentido horario por un ángulo α con respecto al eje del observador A. El observador A describe el sistema con una PDF $f\ (\mathrm{r}, \theta)$, mientras que el observador B asigna al problema una PDF $g\ (\mathrm{r}, \theta)$ (potencialmente) diferente. Ahora, un ángulo asignado con el valor θ por el observador A corresponde a un ángulo $\theta - \alpha$ en el sistema de B. El sistema en sí es idéntico, solo sus descripciones por los dos observadores difieren. Por lo tanto, las dos PDF deben ser idénticas al referirse a la misma situación, lo que significa que

$$f\,(r, \theta) = g\,(r, \theta - \alpha) \tag{1}$$

Esta ecuación simplemente expresa la arbitrariedad de los ejes utilizados para describir la situación, ya sea que el problema en sí exhiba invariancia rotacional o no.

Luego, Jaynes argumenta que el problema de Bertrand no contiene ninguna restricción sobre la orientación de las cuerdas, lo que implica que la solución debe ser idéntica para observadores que están simplemente rotados entre sí. Esta invariancia implica que $f(r, \theta) = g(r, \theta)$, lo que a su vez implica, debido a la Ecuación (1), que $f(r, \theta)$ debe ser independiente de θ. En otras palabras, $f(r, \theta) = f(r)$.

3.2 Invariancia de Escala

Consideremos dos observadores que utilizan diferentes escalas, de modo que el observador A mide un círculo de radio R, mientras que el observador B mide un círculo de radio más pequeño aR, con $a \leq 1$ siendo el factor de escala. Los dos círculos son concéntricos, siendo la escala la única diferencia. Nuevamente, dejemos que el observador A describa el sistema con una PDF $f(r)$, mientras que el observador B utiliza una PDF $h(r)$. Si el punto medio de la cuerda cae dentro del círculo pequeño, simultáneamente define una cuerda en el círculo más pequeño y en el círculo más grande. Esto significa que para $r \leq aR$, las dos distribuciones $f(r)$ y $h(r)$ deben ser proporcionales entre sí. No son iguales porque difieren en su normalización, ya que $f(r)$ también tiene en cuenta las cuerdas donde $r > aR$, que están excluidas de $h(r)$. Por lo tanto, $h(r)$ se puede pensar como probabilidad condicional, es decir,

$$h(r) = \frac{f(r)}{Prob(\text{el punto medio cae dentro del círculo más pequeño})} \tag{2}$$

que ahora se puede reescribir (teniendo en cuenta la invariancia rotacional) como:

$$h(r) = \frac{f(r)}{\int_0^{aR} f(r) 2\pi r dr} \tag{3}$$

Esta relación se cumple tanto si el sistema es invariante a escala como si no lo es. Simplemente representa la transformación de una función de densidad de probabilidad en la otra cuando cambiamos la escala. Tenga en cuenta que en esta y en todas las integrales posteriores sobre distancias, el punto único $r = 0$ se excluye del rango de la integral. Pero dado que todas las integrales involucradas son regulares, este punto único no afecta al valor de la integral en sí. Así, el argumento de Jaynes y su resultado se aplican igualmente al problema regularizado de Bertrand y a la versión original.

Jaynes invoca nuevamente la indiferencia epistémica. Dado que el tamaño del círculo no está determinado en el problema, la solución debería ser independiente de él. Esto significa que si un observador redimensiona todas sus distancias por un factor a (es decir, $r \longrightarrow ar$), la distribución resultante debería permanecer igual, de modo que

$$h(ar)(ar)d(ar)d\theta = f(r)rdrd\theta \longrightarrow a^2 h(ar) = f(r) \tag{4}$$

Reemplazando r por ar en la Ec.(3) y sustituyendo la relación Ec.(4) se obtiene la ecuación integral

$$a^2 f(ar) = 2\pi f(r) \int_0^{aR} f(u) u du \tag{5}$$

donde nuevamente mencionaré por última vez que el punto $u = 0$ está excluido del rango.

Al diferenciar con respecto a a, se puede transformar esto en una ecuación diferencial. Su solución es:

$$f(r) = \frac{qr^{q-2}}{2\pi R^q} \tag{6}$$

donde q es una constante arbitraria. Esta distribución es consistente con dos de las tres soluciones de Bertrand. La solución RB2 (así como B2) corresponde a q $= 1$ y la solución RB3 a q $= 2$. La solución RB1 (o B1) se elimina en esta etapa.

3.3 Invarianza Translacional

Para determinar el valor del parámetro q, Jaynes invoca la invarianza translacional. Dado que la posición del centro del círculo no es una de las variables aleatorias en la PDF, imponer esta simetría requiere cierta interpretación y aquí es precisamente donde el análisis de Jaynes debe confiar en un método específico de selección de cuerdas. Jaynes siempre piensa en la selección de cuerdas a través de su implementación experimental de lanzar pajitas largas a un círculo inscrito en el suelo. La invarianza translacional entonces adquiere un significado muy específico. El lanzamiento de la pajita no está relacionado con la posición del círculo. Siempre que la pajita sea infinitamente larga, define una línea a lo largo de la cual se encuentra la cuerda. La cuerda y su punto medio (r, θ) se determinan a través de la intersección con el círculo, y si el círculo se traslada, la cuerda y su punto medio también se trasladan a nuevos valores (r', θ'). La situación se ilustra en la Fig. 1, donde una sola línea interseca dos círculos, C y C', siendo el segundo desplazado por una distancia b con respecto al primero. Esa intersección genera dos cuerdas diferentes, una para cada círculo, y los puntos medios de estas cuerdas son puntos diferentes. Sea r y r' las distancias de los puntos medios de las cuerdas a sus respectivos centros de círculo y θ y θ' las direcciones de estos puntos medios. Entonces tenemos que

$$\begin{gathered} r' = |r - bcos\theta| \\ \theta' = \begin{cases} \theta & r > bcos\theta \\ \theta + \pi & r < bcos\theta \end{cases} \end{gathered} \tag{7}$$

A medida que lanzamos más pajitas, los puntos medios de las cuerdas generadas en el círculo original pueden variar en un área Γ. Estas mismas líneas luego generan cuerdas en los círculos traducidos, cuyos puntos medios varían en un área diferente, Γ', que no necesariamente es idéntica a Γ. De hecho, el elemento de superficie infinitesimal $dS = rdrd\theta$ es diferente del elemento de superficie $dS' = r'dr'd\theta$.

Luego, Jaynes argumenta que la simetría translacional implica que la probabilidad de que los puntos medios de las cuerdas en el círculo original se encuentren en el área Γ debe ser idéntica a la de los puntos medios de las cuerdas en el círculo traducido, que se encuentran en el área Γ'. En otras palabras, la implementación matemática de la invarianza de la traducción es

$$\int_\Gamma f(r)rdrd\theta = \int_{\Gamma'} f(r')r'dr'd\theta' \tag{8}$$

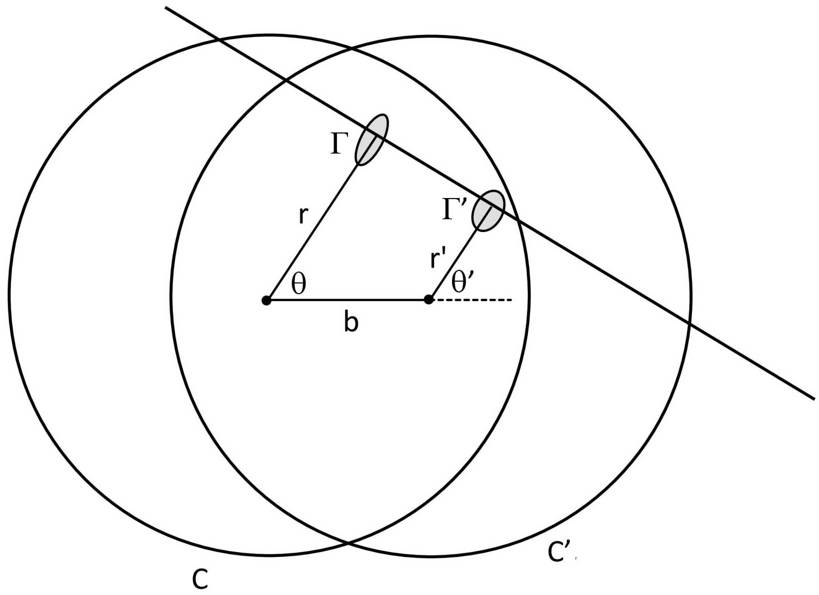

Fig. 1 Invarianza translacional en el procedimiento de lanzamiento de pajitas de Jaynes. Una sola pajita puede intersectar dos círculos, traducidos por una distancia b, generando así dos cuerdas. Los puntos medios de las cuerdas también se traducen entre sí y se encuentran a diferentes distancias de los centros de sus respectivos círculos.

Sustituyendo ahora el resultado de la ecuación (6) para la forma de $f(r)$, y usando las definiciones de r' y θ', ecuación (7), para transformar el término del lado derecho, obtenemos

$$\int_{\Gamma} r^{q-1} dr d\theta = \int_{\Gamma} |r - bcos\theta|^{q-1} dr d\theta \tag{9}$$

donde utilizamos el hecho de que el jacobiano de la transformación de (r, θ) a (r', θ') es igual a uno.

Esta relación implica que $q = 1$, y la PDF resultante $f(r)$ produce el valor 0.5 para la probabilidad de que una cuerda sea más larga que el lado del triángulo inscrito. Este valor es consistente con la solución RB2 (y B2), aunque no está claro a primera vista que realmente represente una implementación de esta solución. RB2 selecciona directamente el punto medio de la cuerda, pero aunque el procedimiento de Jaynes utiliza el punto medio como una caracterización de la cuerda, no parece contener una selección física del propio punto medio. Podría ser el caso, por lo tanto, que represente un procedimiento diferente de todas las soluciones clásicas de Bertrand, que solo coincidentalmente produce el mismo valor numérico que RB2. De hecho, Chiu y Larson encontraron que varios métodos diferentes de selección de cuerdas pueden producir la misma probabilidad de Bertrand [22]. En este caso, sin embargo, aunque el procedimiento de Jaynes no es una implementación directa de RB2, hay razón para creer que el acuerdo numérico no es coincidencia. Tissier presenta un argumento geométrico que sugiere por qué los dos procedimientos coinciden (aunque no demuestra formalmente el acuerdo) [6]. El argumento se basa en el hecho de que dado que la función de densidad de probabilidad $f(r)$ solo depende de la distancia r, se pueden rotar todas las líneas siempre que r permanezca constante y volver a dibujarlas todas como líneas paralelas. Esto mapea el procedimiento de Jaynes a un procedimiento diferente en el que todas las cuerdas se seleccionan de un conjunto de líneas paralelas, que es precisamente el procedimiento subyacente a RB2.

Parecería ahora que hemos demostrado que el problema de Bertrand estaba bien planteado después de todo. Utilizando las simetrías implícitas en la formulación del problema, hemos obtenido una solución única. Además, esta formulación se ajusta a un método experimental de selección de cuerdas y los resultados del análisis de Jaynes están confirmados empíricamente. ¿Qué más podríamos querer?

Pero precisamente la "confirmación" experimental del análisis resulta ser su deshacer . Tenemos el orden lógico de las cosas al revés. El experimento de lanzamiento de paja no es la confirmación empírica de un análisis abstracto independiente. En cambio, el análisis es una matematización del procedimiento de lanzamiento de paja. Esto significa que el procedimiento experimental precede lógicamente al análisis. Es sobre la base de este procedimiento que se derivan las relaciones matemáticas que expresan las simetrías. Lejos de ser una confirmación de que el principio de grupos de transformación produce de hecho una solución única, es la elección de un procedimiento experimental específico la que determina cómo se implementan matemáticamente las simetrías del problema. Como veremos ahora, si hubiéramos pensado en un procedimiento experimental diferente desde el principio, el principio de grupos de transformación habría producido un resultado diferente. El principio no determina que un método único de selección de acordes sea correcto, sino que la elección del procedimiento de selección de acordes determina cómo se aplica el principio. Ahora mostraré cómo, en contra de la opinión de Jaynes, el principio de grupos de transformación produce las otras soluciones de Bertrand.

4 Lanzando dardos: Probabilidad $1/4$

La implementación de la invarianza traslacional en la solución de Jaynes difiere fundamentalmente de la de las simetrías anteriores. Tanto en la invarianza rotacional como en la de escala, el centro de la cuerda permanece inalterado y está representado por el mismo punto tanto para el círculo original como para el círculo rotado o escalado. Esto es consistente con las definiciones iniciales de Jaynes. Nótese que Jaynes comienza su análisis buscando la función de distribución para los puntos medios de las cuerdas, definidos por su posición (r, θ). Esa función de distribución, $f(r, \theta)$, debe cumplir ciertas restricciones matemáticas debido a que diferentes observadores atribuyen diferentes valores de r y \θ al mismo punto, según los ejes y unidades que utilicen. De hecho, en las secciones 1 y 2 de su artículo, Jaynes se refiere específicamente a las diferencias entre observadores como la base de las propiedades de invarianza. Así, dos observadores pueden utilizar ejes diferentes para representar una misma situación, y sus descripciones deben ser consistentes entre sí.

Pero la invariancia translacional impuesta por Jaynes es de una naturaleza completamente diferente. La ecuación de transformación no surge de una diferencia en los observadores, sino más bien de un requisito de invariancia bajo la traducción física del círculo.

Ahora, tal ambigüedad ya estaba presente en el argumento de invariancia de escala. También en ese caso, Jaynes consideró dos círculos diferentes, en lugar de dos observadores. Pero se podría argumentar que no hizo ninguna diferencia. A cualquier cambio de unidades por parte del observador le corresponde un cambio físico de escala del sistema que produce la misma situación. Sin embargo, ese argumento depende del hecho de que ambos observadores estén de acuerdo en el punto que representa el punto medio de la cuerda.

El argumento de la traducción es diferente, porque después de la traducción del círculo, el punto medio de la cuerda es un punto físicamente diferente. r and r' no son dos caracterizaciones diferentes del punto medio de la cuerda; representan las distancias a dos puntos completamente diferentes (los centros de los dos círculos). Si el procedimiento de Jaynes fuera una representación ingenuamente fiel de su elección de variables aleatorias, esperaríamos que el punto medio de la cuerda fuera seleccionado directamente, de modo que cualquier punto que elijamos debe ser el punto medio de la cuerda por definición. Ese no es el caso. La traducción del círculo resulta en una asignación de los puntos medios de la cuerda de un área a otra. Como resultado, las áreas Γ and Γ' son diferentes. Esta es la razón por la que la condición de Jaynes implica que $rf(r,\theta)$ es una función constante, en lugar de, por ejemplo, $f(r,\theta)$ en sí misma.

Por supuesto, no hay nada de malo en estipular, como lo hace Jaynes, un proceso específico mediante el cual se seleccionan las coordenadas del punto medio del acorde, incluso si la selección es solo indirecta. Y es perfectamente posible y válido que un cambio en las condiciones de la selección, como una traslación del círculo, resulte en la selección de un punto medio diferente. Pero tampoco es natural ni inevitable. No es más que una característica particular de un proceso específico.

De hecho, se puede implementar la misma simetría, invariancia traslacional, de una manera diferente, si se asume que la selección del punto medio está determinada por otro proceso. Específicamente, imaginemos que deseamos seleccionar directamente un punto que se define como el punto medio del acorde. Un proceso de selección de este tipo (quizás no el más "natural") podría ser, por ejemplo, tener pajitas empaladas en dardos, de modo que el dardo sirva como eje alrededor del cual las pajitas pueden girar libremente. Luego lanzamos esos dardos a un círculo. Si el dardo golpea el interior del círculo (excluyendo su centro), se define como el punto medio de un acorde. Luego, la pajita se gira alrededor del dardo hasta que el acorde que genera esté centrado en el dardo. Solo hay un acorde de este tipo, por lo que la selección está bien definida. En este procedimiento, a diferencia del de Jaynes, se selecciona primero el punto medio y el acorde se determina a partir de él, en lugar de al revés. Cuando se lanzan pajitas, en otras palabras, se selecciona un acorde y el punto medio se determina a partir del acorde. Cuando se lanzan dardos, se selecciona un punto medio y el acorde se determina a partir de eso. Tenga en cuenta que en ninguno de estos procedimientos, ni en el de Jaynes, podemos seleccionar directamente tanto los acordes como las coordenadas de sus puntos medios.

Ahora consideremos la situación representada en la Fig. 2, en la cual comparamos nuevamente dos círculos, C y C', cuyos centros están traducidos por una distancia b. Supongamos que el dardo golpea el punto O, a una distancia r del centro del círculo C y a una distancia

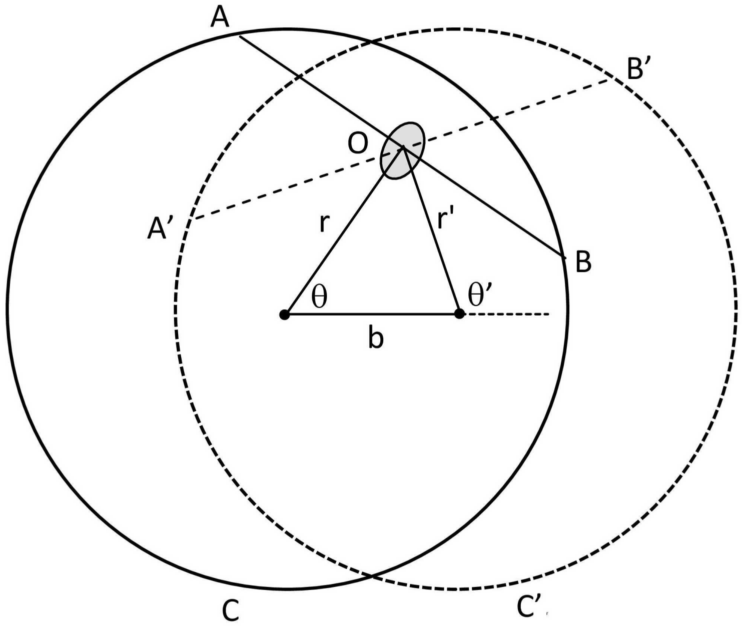

Fig. 2 Invarianza translacional en el procedimiento de la pajita atravesada. El punto seleccionado (donde el dardo aterriza) se define como el punto medio de la cuerda. Si dos círculos se traducen por una distancia b , el mismo punto medio pertenecerá a dos cuerdas diferentes.

r' del centro del círculo C' . En el círculo C , esto genera la cuerda AB , centrada alrededor de O . En el círculo C' , sin embargo, O está a una distancia diferente del centro, y la cuerda cuyo punto medio es O es $A'B'$, que difiere de AB . Esto es el equivalente exacto del procedimiento de Jaynes, en el cual una sola línea genera la cuerda en ambos círculos y los puntos medios son diferentes. Aquí, el punto medio permanece constante y las cuerdas son diferentes.

Al igual que antes, la invarianza bajo la traslación requiere que

$$\int_{\Gamma} f(r,\theta)dS = \int_{\Gamma'} f(r',\theta')dS' \tag{10}$$

La diferencia entre este caso y el de Jaynes es que bajo el procedimiento de lanzamiento de dardos, las áreas Γ and Γ' son idénticas, porque seleccionamos directamente los puntos medios. De hecho, dS and dS' son idénticos, ya que los puntos que los ocupan son idénticos. Como resultado, la condición de invarianza traslacional ahora requiere que

$$f(r,\theta) = f(r',\theta') \Longrightarrow r^{q-2} = (r')^{q-2} \tag{11}$$

donde r'es dado por la relación

$$r' = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rbcos(\theta)} \tag{12}$$

La ecuación (11) implica inmediatamente que $q=2$ y que $f(r,\theta)=\frac{1}{\pi R^2}$, una constante. La probabilidad de que el punto medio de una cuerda se encuentre en un área S es entonces proporcional a esa área, y la probabilidad de Bertrand es $\frac{1}{4}$, confirmando RB3. Este resultado se obtuvo a través del principio de transformaciones de Jaynes, al igual que el resultado original de Jaynes, sin embargo, los dos resultados son diferentes. Obviamente, y en contra de la afirmación de Jaynes, el principio no selecciona una solución única para la función de distribución de probabilidad. La razón es que la implementación matemática de las simetrías no es única. La traducción, por ejemplo, no es un conjunto de transformaciones definido de manera única bajo el cual las probabilidades debe ser invariante. Resulta que hay varias posibles expresiones matemáticas del hecho de invariancia bajo la traducción, y estas dependen de el procedimiento experimental seleccionado para generar la PDF. Por lo tanto, el principio de Jaynes dará como resultado la solución RB2 de Bertrand o la solución RB3, dependiendo de qué ecuaciones establezcamos para expresar el hecho de la invariancia traslacional.
Lanzar pajitas para seleccionar acordes sugiere una implementación matemática particular de la invariancia translacional. Lanzar dardos para seleccionar los puntos medios de los acordes sugiere una diferente. Ninguna es intrínsecamente más correcta que la otra. Cada una representa las condiciones del procedimiento experimental elegido.

De hecho, sin embargo, la multiplicidad de soluciones es aún mayor, ya que la solución RG1 también se puede derivar del principio de Jaynes, utilizando precisamente las mismas simetrías, es decir, la invariancia de rotación, escala y traslación. Esto parece extraño al principio, porque Jaynes aparentemente demostró que esta solución viola la invariancia de escala. Sin embargo, resulta ser engañoso. La razón es que justo al principio, Jaynes decidió arbitrariamente describir el acorde a través de las coordenadas de su punto medio. Pero esta caracterización no es única y uno podría igualmente describir un acorde usando un conjunto diferente de variables. Aplicar el principio de grupos de transformación a esas variables genera un conjunto diferente de condiciones matemáticas, que a su vez producen una solución diferente para la función de densidad de probabilidad (PDF).

5 Giradores siguientes: Probabilidad $1/3$

La aplicación de Jaynes del principio de grupos de transformación rechazó la solución de Bertrand RG1 porque viola la invarianza de escala. Sin embargo, la descripción textual del procedimiento RG1 no incluye ningún elemento obviamente dependiente de la escala, por lo que parece misterioso que se elimine por estos motivos. Como mostraré ahora, esto no es más que un artefacto de la elección propia de Jaynes del procedimiento de generación de acordes, y una elección diferente puede hacer que esta solución sea viable.

El procedimiento regularizado RB1 consta de dos pasos y se puede implementar empíricamente mediante un girador, como una aguja montada en un eje vertical para que pueda girar libremente en el plano horizontal. El experimentador comienza en el centro del círculo y hace girar la aguja. Luego procede en la dirección en la que apunta la aguja después de detenerse, hasta que intersecta el círculo. Esto selecciona un punto aleatorio en la circunferencia. A partir de ese punto, el el experimentador gira su aguja nuevamente y traza una línea a lo largo de la dirección que indica. Ahora, en la mitad de los casos, la aguja apuntará lejos del círculo. Para superar este problema, decretemos que el experimentador dibuje la línea en ambas direcciones desde su posición, de modo que una de estas extensiones seguramente caiga dentro del círculo y defina una cuerda.

Formalmente, identificamos las dos direcciones determinadas por el girador con dos ángulos α (la dirección del vector de radio hacia el punto final elegido en el perímetro) y β (la dirección de la cuerda desde ese punto). También especificamos una convención de signos para ambos ángulos, como que sean positivos si se miden en sentido contrario a las agujas del reloj. Ahora estamos buscando la función de densidad de probabilidad (PDF) de estos ángulos, $f_1(\alpha, \beta)$, según lo determinado por un grupo apropiado de transformaciones (siempre excluyendo los diámetros).

Debe tenerse en cuenta que nuestro procedimiento no asigna una cuerda a un solo par de ángulos, sino a cuatro pares de ellos. De hecho, dado que una cuerda tiene dos puntos finales, hay dos posibles valores de α para cada cuerda individual (denotados, por ejemplo, α_1 y α_2), cada uno correspondiente a uno de los puntos finales. Además, nuestro procedimiento dicta que los ángulos β y $\beta + \pi$ corresponden a la misma cuerda, uno de estos ángulos apuntando hacia el interior del círculo y el otro hacia el exterior. Dado que decidimos extender nuestra línea en ambas direcciones, ambos ángulos generan la misma línea en el plano, y por lo tanto la misma cuerda.

Las relaciones matemáticas entre los cuatro conjuntos de ángulos correspondientes a un solo acorde dependen de la dirección con respecto a la cual se miden α y β. Por ejemplo, si se mide β como el ángulo entre el acorde y el vector de radio hasta el punto final, entonces el acorde determinado por (α, β) es idéntico al determinado por los pares $(\alpha, \beta + \pi)$, $(\pi + \alpha - 2\beta, -\beta)$ y $(\pi + \alpha - 2\beta, \pi - \beta)$. Otras definiciones generan expresiones diferentes para los cuatro conjuntos de ángulos correspondientes. La libertad para determinar las direcciones con respecto a las cuales se determinan α y β resulta ser crucial para el problema en cuestión, como veremos en breve.

Aunque esta correspondencia $1{:}4$ podría ser un problema en algunas formalizaciones, en realidad no tiene importancia en lo que respecta a las probabilidades. Esto se debe a que $f_1(\alpha, \beta)$ cuenta cada acorde exactamente cuatro veces [2], y se normaliza con respecto al número total de opciones correspondientes a todos los posibles valores de α y β, que también es exactamente cuatro veces el número total de acordes en el círculo, excluyendo los diámetros [3]. Por lo tanto, el factor 4 se cancela y las probabilidades son idénticas ya sea que contemos cada acorde una vez o cuatro veces.

El cambio en el procedimiento implica un cambio en la aplicación de los grupos de transformación relevantes. Dado que la función de densidad de probabilidad $f_1(\alpha, \beta)$ solo contiene variables angulares, es automáticamente invariante a escala, por lo que esta simetría no agrega nueva información (nota que esta simetría fue la que eliminó esta solución en el análisis original de Jaynes).

2 Esto se debe a que excluimos los diámetros, que corresponden a $\beta = 0$, de modo que β y $-\beta$ siempre corresponden a ángulos diferentes.

3 Utilizo el término 'número' de manera informal aquí, por brevedad. Uno puede transferir fácilmente esto al lenguaje de las medidas.

Las traducciones también son de poca ayuda porque los ángulos solo tienen sentido con respecto a un centro determinado, aunque arbitrario. Otra forma de decir esto es considerar la pragmática del procedimiento experimental. En el método de Jaynes, se lanzan pajitas al suelo y esta operación se puede realizar sin referencia al círculo (siempre y cuando las pajitas sean efectivamente infinitas). En otras palabras, el experimentador no necesita saber dónde está ubicado el círculo para realizar el procedimiento. No es así en el caso presente. El primer giro determina la dirección en la que el experimentador se mueve desde el centro del círculo. Sin conocer la posición de este centro, no se puede seleccionar una cuerda. Esto no contradice el argumento de Jaynes de que la posición del círculo no debería importar. Tampoco importa aquí. El centro del círculo se puede trasladar a voluntad. Pero el procedimiento solo comienza después de que esa posición haya sido fijada. Por lo tanto, aunque la ubicación del círculo es arbitraria (como se requiere en el análisis de Jaynes), debe determinarse antes de seleccionar la cuerda.

Las traducciones no tienen importancia para la forma del PDF que buscamos, por lo tanto, porque esta forma no se altera si el círculo se traduce previamente al momento de la selección de α y β, y el procedimiento en sí prohíbe cualquier traducción después de la selección de los ángulos. Así, aunque la escala y la ubicación del círculo son tan arbitrarias aquí como lo eran en el procedimiento de Jaynes, no tienen influencia en la forma del PDF y por lo tanto no proporcionan información al respecto.

Sin embargo, hay un elemento que permanece indeterminado en el proce- dimiento, y esta única simetría fija completamente el PDF. De hecho, en ningún momento especificamos hacia dónde se enfrentaba el experimentador mientras giraba la aguja y, por lo tanto, el resultado debería ser independiente de esta información. Este es un tipo de simetría rotacional, que se puede formalizar de la siguiente manera. La dirección hacia la cual se enfrenta el experimentador se puede tomar como el cero del ángulo de la aguja , es decir, la dirección del eje polar con respecto al cual se mide. Decir que el problema de Bertrand deja esta dirección sin especificar es equivalente a decir que somos libres de elegir arbitrariamente la dirección del eje polar. Pero en nuestro procedimiento, el experimentador hace girar la aguja dos veces y no hay razones para relacionar su orientación la primera vez con la que adopta la segunda vez. En otras palabras, no es necesario medir ambos ángulos con respecto al mismo eje. Mientras se conozcan los dos ejes, determinando de manera inequívoca las direcciones espaciales, se pueden elegir de forma independiente entre sí. Esto se debe a que nunca comparamos α y β directamente o los combinamos durante la selección de la cuerda [4]. De hecho, como se mencionó anteriormente, β se podría definir como el ángulo entre la cuerda y el vector de radio, mientras que α obviamente debe definirse con respecto a algún otro eje. Un observador B puede usar ejes rotados por ángulos θ (para el eje que define α) y ϕ (para el eje

[4] La única excepción a esto es la relación entre los cuatro ángulos que identificamos como seleccionando el mismo acorde. Estos dependen de los ejes elegidos. Sin embargo, esto no influye en la independencia de la elección de ángulos y ejes en primer lugar.

definiendo β). Los ángulos que utiliza son entonces

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha - \theta \\ \beta' &= \beta - \phi \end{aligned} \tag{13}$$

La situación empírica es independiente de la elección de ejes y el problema no contiene ninguna restricción en esta elección. Usando el propio argumento de Jaynes, esta falta de restricciones implica que la solución debe ser idéntica para ambos observadores. Debemos tener que

$$f_1(\alpha, \beta)\, d\alpha d\beta = f_1(\alpha', \beta') d\alpha' d\beta' \tag{14}$$

o en otras palabras,

$$f_1(\alpha, \beta) = f_1(\alpha - \theta, \beta - \phi) \tag{15}$$

Dado que θ y ϕ son arbitrarios, y considerando la condición de normalización, la única solución a esta relación es la función constante:

$$f_1(\alpha, \beta) = \frac{1}{4\pi^2} \tag{16}$$

La respuesta correspondiente al problema de Bertrand es ahora:

$$P_1 = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} f_1(\alpha, \beta) d\alpha d\beta + \int_0^{2\pi} \int_{5\pi/6}^{7\pi/6} f_1(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = \frac{1}{3} \tag{17}$$

donde definimos el ángulo β como el ángulo entre la cuerda y el radio vector. Así hemos obtenido la solución RB1 utilizando exactamente las mismas simetrías que Jaynes utilizó en su análisis original para justificar RB2. Esto se debe a que el procedimiento de selección diferente que definimos produce diferentes expresiones matemáticas de las simetrías. Una vez más, vemos que el principio de grupos de transformación no elimina la multiplicidad de soluciones sugeridas por el principio de indiferencia. En cambio, tiene tantas interpretaciones diversas, dependiendo del procedimiento de generación de la cuerda, porque una "simetría" no corresponde a una única prescripción matemática, sino más bien a una receta general para generar dicha prescripción, basada en la forma en que se seleccionan las cuerdas. El resultado final de la receta dependerá de los detalles de la selección de la cuerda, al igual que un pastel real depende de los ingredientes y herramientas específicos utilizados para implementar los nombres y procedimientos genéricos utilizados en la receta.

6 Palos liberadores: Probabilidad $1/3$ nuevamente

A veces se presentan dudas sobre si las diferentes realizaciones físicas de métodos de selección de acordes son igualmente válidas. Wang, por ejemplo, afirma que solo el método de Jaynes es aplicable porque

> Los seguidores de la paradoja de Bertrand asumen descuidadamente que los 'acordes aleatorios' generados por cualquier método 'aleatorio' se distribuirán de manera uniforme o homogénea en el círculo. [18, p.3035]

Esta crítica desconcertante se aclara en el trabajo posterior de Wang y Jackson, quienes afirman que

> Todos están de acuerdo en cómo son los acordes de Bertrand [acordes generados aleatoriamente en un círculo unitario]: se distribuyen de manera homogénea o uniforme en el círculo. [19, p. 76]

Pero, por supuesto, no todos están de acuerdo con esto. Tissier, por ejemplo, también señala estos hechos pero aún admite que todos los procedimientos para seleccionar acordes son igualmente válidos, lógicamente [6]. Es, por supuesto, precisamente el punto del argumento de Bertrand que el término 'aleatorio' no especifica suficientemente las propiedades de la distribución para determinarla. Lejos de resolver la paradoja, afirmar que 'aleatorio' debe significar alguna propiedad matemática específica de la distribución solo refuerza el punto de Bertrand de que diferentes significados de 'aleatorio' darán diferentes distribuciones.

Wang y Jackson utilizan los supuestos no expresados que las personas hacen, en sus opiniones. Por lo tanto, ellos dicen

> [¿]Por qué la gente piensa que este problema debería tener solo una solución? La razón solo puede ser: las cuerdas de Bertrand están distribuidas homogéneamente en las mentes de las personas. [19, p.77]

La afirmación se basa en lo que parece "natural", aunque ni yo ni (sospecho que varios) otros piensan que este problema debería tener solo una solución, ni que debe tener cuerdas distribuidas uniformemente. Sin embargo, la pregunta de un método " natural" de seleccionar cuerdas al azar parece surgir aquí y allá, incluso con aquellos que reconocen que no es suficiente motivo para justificar ningún procedimiento específico. Así, Tissier considera que solo la solución B2 - la que "demostró" Jaynes - selecciona directamente cuerdas al azar [6]. Los demás seleccionan otras propiedades que luego determinan las cuerdas indirectamente.
Sin embargo, reconoce que esto no invalida los otros procedimientos. Di Porto et al. refinan el procedimiento de lanzamiento de Jaynes teniendo en cuenta el tamaño de las pajas y concluyen que "creemos que nuestro enfoque proporciona la solución natural a la paradoja de Bertrand", aunque la única justificación para esto parece ser, si los leo correctamente, que se basa en un experimento físico en lugar de dibujar aleatoriamente los acordes [16]. Jaynes mismo parece tener una posición similar cuando escribe

> Será útil pensar en esto de una manera más concreta; presumiblemente , no hacemos violencia al problema (es decir, sigue siendo igual de " aleatorio") si suponemos que estamos lanzando pajas al círculo, sin especificar cómo se lanzan. [14, p. 477, énfasis añadido]

Pero por supuesto, como ya señaló Shackel [12], Jaynes está haciendo violencia al problema al elegir un procedimiento físico específico para implementarlo. Sin embargo, la mayoría de los autores posteriores (incluso aquellos que finalmente rechazan la actitud de Jaynes) aceptan que lanzar pajas es la implementación física del problema, y que el principio de grupos de transformación selecciona en última instancia una solución física única al problema (algunos rechazan la idea de que esto representa una solución a la consulta general de Bertrand, sin embargo, por ejemplo, [12]).

Presumiblemente, la razón por la cual el procedimiento de Jaynes parece ser tan fácilmente aceptado como la implementación física tiene algo que ver con la "naturalidad", es decir, otros métodos de selección parecen ser menos directamente una elección de acordes reales. Seleccionar puntos en la circunferencia o lanzar dardos para especificar un punto medio no generan físicamente un acorde, aunque lógicamente seleccionan una entidad única. Después de la selección física, el acorde debe ser trazado a través de los puntos seleccionados, o en el caso de nuestros dardos clavados, la pajita debe ser ajustada intencionalmente para que el punto seleccionado sea realmente el punto medio. Hay cierta artimaña en estos métodos que puede dejar dudas sobre su validez, aunque lógicamente reconocemos que son aceptables, porque parecen no involucrar acordes reales sino algo más abstracto.

El procedimiento de Jaynes no está exento de fallos propios, especialmente porque es estrictamente válido solo para pajitas infinitas lanzadas desde infinitamente lejos [11,16,17]. Además, uno debe tener cuidado de ajustarlos antes de lanzarlos, para evitar una orientación preferida a lo largo de la línea del brazo que sostiene la pajita. No obstante , que el cálculo de Jaynes esté respaldado por un experimento aparentemente le otorga un peso significativo. Los procedimientos descritos anteriormente ciertamente se pueden implementar físicamente, pero aún sufren por no ser selecciones directas de líneas en lugar de puntos. Dado esta posible duda persistente, ahora presentaré una implementación diferente del método RB1, en la cual los acordes se seleccionan directamente y además solo involucra pajitas finitas, por lo que es estrictamente práctico, no solo como un proceso límite.

En lugar de una pajita, uso un palo puntiagudo (debe ser rígido), de longitud 2 R o ligeramente más. Primero, se selecciona un punto aleatorio en el perímetro de un círculo dibujado en el suelo (por ejemplo, usando el palo como aguja de un girador - esta etapa no es importante debido a la simetría rotacional del problema). Sea la posición angular de su vector de radio ψ. En el punto elegido, luego se equilibra el palo puntiagudo perpendicularmente y se libera desde el reposo.
Aproximadamente la mitad de las veces, la vara caerá fuera del círculo, contando como un fracaso (El procedimiento de Jaynes también tiene fracasos similares), pero cuando cae a través del círculo, selecciona una cuerda. La segunda variable aleatoria, θ, es el ángulo en el que cae la vara, con respecto, por ejemplo, al diámetro que pasa por el punto de liberación. Buscamos la función de distribución de probabilidad $f_2(\psi, \theta)$.

Este procedimiento es claramente otra forma de implementar RB1. La razón por la que lo describo aquí es doble. En primer lugar, se presta muy fácilmente a la verificación experimental. Más importante aún, sin embargo, es que cuando se aplica el principio de grupos de transformación, se descubre que las simetrías funcionan de manera bastante diferente al caso descrito en la sección 5, aunque ambos representan implementaciones de la misma solución. No puedo pensar en una mejor manera de mostrar que la aplicación de condiciones de simetría depende crucialmente de los detalles del procedimiento de selección.

Estamos considerando las mismas tres simetrías: rotación, escala y trans- lation. Por el mismo argumento exacto que antes, la simetría rotacional implica que la función de densidad de probabilidad es independiente de ψ. Nótese que el ángulo θ no se ve afectado por las rotaciones ya que está definido con respecto a un diámetro específico que rota junto con el círculo. Así, la simetría rotacional nos proporciona información, pero no suficiente para determinar la función de densidad de probabilidad, a diferencia del caso de los giradores.

La invarianza ante la escala, por otro lado, tampoco se espera que nos dé información, ya que los ángulos son independientes de la escala. Sin embargo, es instructivo entender cómo se aplica la invarianza ante la escala en este caso, porque ejemplifica de manera clara cómo la misma simetría toma diferentes aspectos según el procedimiento de selección que la subyace. A diferencia de los dos primeros casos que vimos, la invarianza ante la escala aquí no puede basarse en comparar dos círculos concéntricos. El procedimiento de selección asume que dejamos caer la vara desde un punto en la cir- cunferencia, y los círculos concéntricos no pueden tocarse. En cambio, si vamos a considerar círculos de diferentes radios, deben ser tangentes entre sí en el punto de liberación de la vara. La situación se describe en la Fig. 3. Muestra claramente, como se esperaba, que cada vara que genera una cuerda en un círculo también genera una cuerda en el otro, y que estas dos cuerdas son ambas más largas que los lados de los triángulos inscritos respectivos o ambas más cortas. El ángulo θ que describe la orientación de la cuerda debe ser el mismo para ambos círculos , y por lo tanto la función de densidad de probabilidad es trivialmente invariante, cualquiera que sea su forma, como ya sabíamos de antemano.

Sin embargo, vale la pena señalar, como se mencionó, que la situación a la que se aplica esta simetría - dos círculos tangentes - es completamente diferente a la que se aplicaba en el procedimiento de Jaynes - dos círculos concéntricos. Por lo tanto, aunque la simetría es "la misma", lo que significa que sigue siendo invariante a escala, la forma específica que toma depende del procedimiento de selección de la cuerda.

Lo mismo se aplica a la traslación, que determina la función de densidad de probabilidad aquí. Si una sola vara va a crear una cuerda en dos círculos, deben ser tangentes. Por lo tanto, no todas las traslaciones son posibles. Solo aquellas que dejan un punto en el perímetro del círculo en su lugar pueden considerarse. La situación se describe en la Fig. 4, que muestra dos círculos cuyos centros están a una distancia b entre sí, de modo que comparten el punto de origen de la cuerda. Los diámetros de los dos círculos que pasan por ese punto forman un ángulo ϕ , y el ángulo de la cuerda en el círculo trasladado, θ' , está dado por

$$\theta' = \theta - \phi \tag{18}$$

Dado que $d\theta' = d\theta$, la invarianza de las probabilidades a tales traducciones debe significar ahora que

$$f_2(\theta) = f_2(\theta') = f_2(\theta - \phi) \tag{19}$$

Dado que esto debe cumplirse para cualquier ϕ, $f_2$debe ser la constante

$$f_2(\theta, \psi) = \frac{1}{2\pi^2} \tag{20}$$

La probabilidad de Bertrand se calcula de manera casi idéntica a la de la Ec.(17) y es similarmente $1/3$. Una vez más, este es el resultado de aplicar el principio de grupos de transformaciones. Difiere en su realización subyacente de los otros casos que hemos considerado, aunque da la misma respuesta numérica que la solución del spinner. Representa una implementación física diferente.

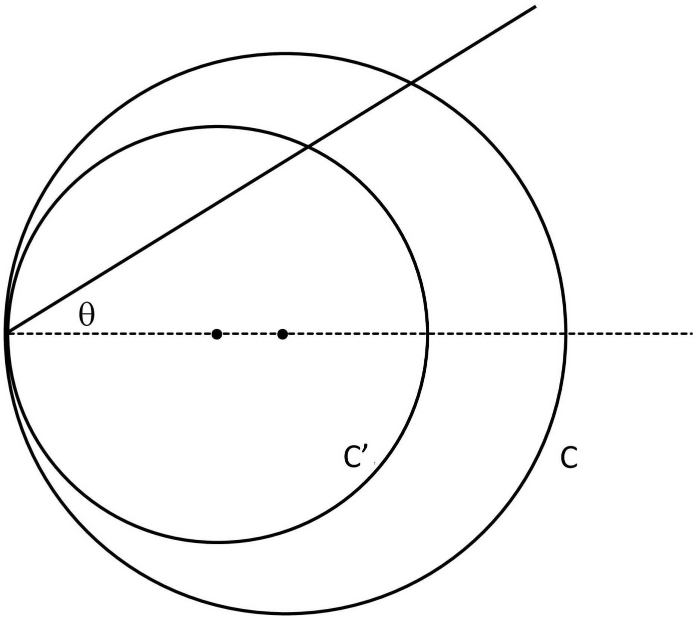

Fig. 3 Invarianza de escala en el procedimiento de liberación de la vara. El punto de liberación se define en el perímetro del círculo. Un cambio de escala implica que el círculo más pequeño y el más grande son tangentes en ese punto.

sin embargo, y la forma de las relaciones de simetría que implica son consecuentemente también diferentes.

Para verificar el resultado, dibujé un círculo en un trozo de papel, que luego dejé caer desde una cierta altura, dándole un giro en el proceso. Cuando el papel aterrizó en el suelo, coloqué un lápiz dentro y lo giré. El punto en la circunferencia al que apuntaba el lápiz después de detenerse fue elegido como un extremo de la cuerda. El objetivo de este procedimiento era aleatorizar tanto como fuera posible tanto la posición del trozo de papel como la mía, para contrarrestar las irregularidades en el suelo y cualquier preferencia que mis músculos pudieran tener. Luego coloqué un palo delgado y puntiagudo en posición vertical en el punto seleccionado y lo solté desde una posición lo más perpendicular posible. Debido a que el procedimiento es obviamente muy sensible a pequeñas inclinaciones en la posición del palo, y por lo tanto a cualquier error sistemático al colocarlo en posición vertical, repetí el experimento más veces de las que Jaynes realizó.

De 700 intentos, 363 fueron éxitos (es decir, el palo cayó sobre el círculo), una probabilidad de 0.518. Utilicé este número para estimar si tenía un error sistemático significativo en la posición del palo. Aunque se podría haber esperado que estuviera más cerca de la figura esperada de 0.5, considero que el resultado es bastante satisfactorio. De los lanzamientos exitosos, la cuerda era más larga que el lado de

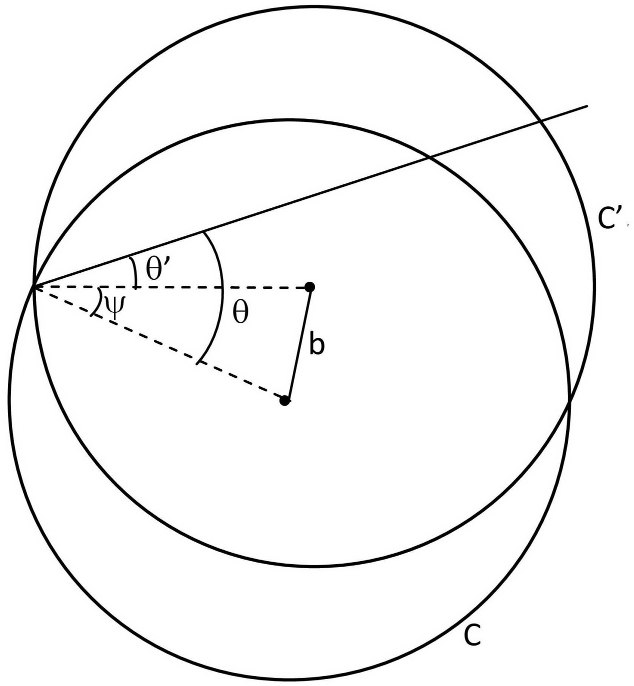

Fig. 4 Invariancia translacional en el procedimiento de liberación del palo. Se puede trasladar el círculo siempre y cuando el punto de liberación permanezca en el perímetro. Esto es equivalente a una rotación alrededor de ese punto por un ángulo ψ. El palo luego define dos cuerdas en los dos círculos traducidos, con diferentes orientaciones.

el triángulo inscrito 123 veces, o una proporción de 0.339, bastante cerca del valor teórico esperado de $1/3$.

Aunque más sensible a errores sistemáticos que el de Jaynes, este procedimiento selecciona directamente acordes (en lugar de alguna característica abstracta como el punto medio) y por lo tanto es igualmente “natural”. Así, tenemos otro método ex- perimental de selección de acordes, que produce un resultado diferente al de Jaynes. Este resultado confirma un cálculo teórico basado en las mismas propiedades de invariancia que Jaynes utilizó, correctamente entendidas en el contexto del procedimiento, es decir, simetrías rotacionales, de escala y de traslación. Por lo tanto, vemos nuevamente que el principio de grupos de transformación puede generar una solución di- ferente, y que esta solución está igualmente verificada experimentalmente. Hay más métodos para generar acordes directamente y se pueden verificar empíricamente de manera similar. Estos producen valores aún di- ferentes a los considerados aquí y representan soluciones adicionales más allá de las tres originales de Bertrand [23].

7 Discusión

En su discusión del principio de indiferencia como una herramienta heurística en física, Gillies imagina el siguiente escenario:

> [C]onsider[...] nuevamente el análisis de Jaynes del caso del acorde aleatorio y el experimento de confirmación que realizó. La misma conclusión podría haber sido alcanzada por otro científico (digamos el Sr. K) siguiendo una ruta diferente . Supongamos que el Sr. K aplica el Principio de Indiferencia al caso del acorde aleatorio, pero inicialmente solo se le ocurre el tercer enfoque [B3] (que produce P(CLSE) $= 1/4$). Calcula la distribución completa de las longitudes de los acordes en este enfoque y luego prueba la distribución utilizando exactamente el mismo experimento que Jaynes. En el caso del Sr. K, sin embargo, el experimento refuta su distribución hipotética.
> Ante esta refutación, el Sr. K analiza el problema más a fondo. Descubre las otras dos formas de aplicar el Principio de Indiferencia, y también considera los requisitos de invarianza que sugieren que el primer enfoque es el mejor de los tres. De esta manera, explica con éxito el resultado de su experimento.

Esta es ciertamente una secuencia posible de eventos, pero no es la única, y aunque estoy de acuerdo con la última frase de Gillies, tengo reservas sobre el resto. Mientras leo la historia de Gillies, él imagina que el Sr. K utiliza solo el principio de indiferencia en sus cálculos iniciales, pero no argumentos de simetría. Luego puede derivar la distribución de las longitudes de los acordes a partir de la suposición de que el punto medio de los acordes se selecciona de una distribución uniforme sobre el área del círculo. Hasta aquí todo bien, pero ¿por qué el Sr. K usaría luego el experimento de Jaynes para probar su distribución? Es cierto que puede ser la única opción que se le ocurra, pero como hemos visto, no es la única disponible. Contrariamente a una opinión aparentemente recibida, existen otros métodos de seleccionar acordes al azar experimentalmente, y estos producen probabilidades de Bertrand diferentes (me refiero a seleccionaracordes, en lugar de algunas características que se pueden utilizar para luego dibujar el acorde). Esto significa que cuando el Sr. K obtiene una discrepancia y analiza el problema más a fondo, no necesariamente encontrará las otras dos formas de aplicar el principio. En cambio, puede encontrar otro método experimental para probar su distribución, y es muy posible que confirme su cálculo.

Sin embargo, el punto más importante es que suponiendo que el Sr. K también encuentre otras soluciones de Bertrand además de la idea de utilizar requisitos de invariancia, el resultado no será lo que Gillies piensa. De hecho, cada una de estas soluciones puede ser respaldada por requisitos de invariancia e incluso por los mismos requisitos, en el sentido de que todas se llamarán invariancia de rotación, escala y traslación. Pero las restricciones matemáticas que imponen en las funciones de densidad de probabilidad son diferentes porque, al igual que el principio de indiferencia, se pueden aplicar de diferentes maneras, dependiendo de cómo se seleccionen las cuerdas aleatorias en el círculo.

Si el hipotético Sr. K es un científico, como lo describe Gillies, en lugar de un filósofo, es probable que aún esté satisfecho, ya que aún podrá explicar los resultados de sus experimentos. Se dará cuenta de que tiene varios procedimientos empíricos disponibles, que cada uno implica ciertos requisitos matemáticos que se derivan de consideraciones de simetría, y que para cada procedimiento, puede calcular teóricamente la función de densidad de probabilidad y descubrir que describe los resultados de los experimentos. No le sorprenderá que los cálculos arrojen valores diferentes, ya que esperará que diferentes procedimientos (con diferentes implementaciones de las simetrías) produzcan resultados diferentes, tanto teórica como experimentalmente.

Si el Sr. K es un filósofo, por otro lado, puede permanecer insatisfecho, pero ha hecho algún progreso de todos modos. Es cierto, todavía tiene una elección entre varias posiciones. Puede considerar que el problema de Bertrand está mal planteado pero resoluble en varios problemas bien planteados una vez que se establece el procedimiento de selección, siguiendo a Marinoff [11], o puede insistir en que aún debe haber un sentido en el que "aleatorio" signifique algo específico, aunque solo a nivel meta, como Aerts y Sassoli de Bianchi [24], o también puede considerar que el problema sigue siendo un desafío sin resolver, como lo hace Shackel [12]. Sin embargo, lo que ha ganado es la comprensión definitiva de que el principio de grupos de transformación no hace que el problema esté bien planteado, y que las estrategias de planteamiento que se basan en consideraciones de simetría deben ser rechazadas. Cualquier cosa en la que crea el principio de indiferencia debe aplicarse igualmente al principio de grupos de transformación. Si cree que el principio de indiferencia solo es aplicable después de que el problema se haya separado en alternativas bien planteadas, entonces también lo es el principio de grupos de transformación. Si cree que el principio de indiferencia falla, entonces también lo hace el principio de grupos de transformación.

Esto no quiere decir que el principio de Jaynes no tenga sus usos. No nos permitirá obtener una respuesta definitiva donde el principio de indiferencia nos deja confundidos, pero puede ser una poderosa heurística y un dispositivo formal para guiarnos hacia la PDF correcta una vez que hayamos decidido cuál es el procedimiento de selección adecuado. Consideremos el propio procedimiento de Jaynes de lanzar pajitas, y imaginemos que el orden lógico de las preguntas está invertido. En otras palabras, supongamos que la pregunta que hacemos es 'dado este procedimiento de selección, ¿cuál es la PDF correcta para la longitud de la cuerda?' El principio de indiferencia es difícil de aplicar aquí, porque el procedimiento no selecciona directamente los puntos medios de la cuerda, aunque estos son los parámetros que utilizamos. En cambio, determina estas coordenadas indirectamente a partir de la posición de la pajita. Por lo tanto, las variables aleatorias que utilizamos no son seleccionadas directamente y el principio de indiferencia no debería ser aplicable a ellas, como de hecho no lo es.

Cuando se enfrenta a un problema de este tipo, se pueden probar dos enfoques. El primero es transformar el problema en algo a lo que el principio de indiferencia se aplique directamente. Esto sugiere que el orden del análisis de Jaynes es al revés. Se comienza con un procedimiento experimental específico y luego se busca una formulación más abstracta. En este caso, el argumento de Tissier, al que ya se ha aludido varias veces anteriormente, sugeriría que el problema es isomorfo al de seleccionar aleatoriamente una cuerda de un conjunto de líneas paralelas [6]. Esto, a su vez, nos llevaría a formular el problema de Bertrand y la solución RB2 (o B2). Para esto, el principio de indiferencia sugiere una solución y una probabilidad de Bertrand de $1/2$.

El otro enfoque probablemente se consideraría más 'físico'. Aquí es donde el principio de grupos de transformación muestra su utilidad. En lugar de buscar el espacio muestral correcto en el que asumir una distribución de probabilidad uniforme, imponemos condiciones físicas en forma de requisitos de simetría en el problema. Sin embargo, estas no son propiedades abstractas, sino condiciones matemáticas específicas derivables del procedimiento que estamos considerando.
Para ese procedimiento en particular, el principio de grupos de transformación luego daría como resultado la función de densidad de probabilidad en una base que no dependería de analogías con formulaciones más abstractas. Es precisamente la estrecha relación de estas simetrías con los detalles del procedimiento lo que le da fuerza al argumento. Es porque depende de los detalles físicos de la selección que podemos confiar en la derivación.
Las analogías y abstracciones son vulnerables al argumento de la adecuación. Nunca podemos estar seguros de que al transformar nuestro problema en algo supuestamente equivalente no hayamos cambiado inadvertidamente algún aspecto crucial.
Para aquellos problemas en los que la aplicación del principio de indiferencia no está clara o el espacio muestral correcto no es inmediatamente evidente, el principio de grupos de transformación ofrece una alternativa basada en las propiedades físicas del procedimiento de selección. Es a estos problemas prácticos a los que debería resultar útil, en lugar de a discusiones filosóficas generales.

Referencias

1. Sklar, Lawrence: Física y Azar Problemas Filosóficos en los Fundamentos de la Mecánica Estadística. Cambridge University Press (1993)
2. Keynes, John Maynard: Un Tratado sobre Probabilidad, Macmillan, Londres ([1921], 1963)
3. Bertrand, Joseph L. F.: Cálculo de Probabilidades. Gauthier-Villars, París. pp. 4-5 (1889)
4. Northrop, Eugene P.: Enigmas en Matemáticas: Un Libro de Paradojas. Van Nostrand, Nueva York (1944)
5. Garwood, F. y Holroyd, E. M.: La distancia de una "cuerda aleatoria" de un círculo desde el centro, The Mathematical Gazette 50 (373), 283-286 (1966)
6. Tissier, P. E.: Paradoja de Bertrand, The Mathematical Gazette 68 (443), 15-19 (1984)
7. van Fraassen, Bas: Leyes y Simetría. Clarendon Press, Oxford (1989)
8. Gillies, Donald: Teorías Filosóficas de la Probabilidad. Routledge, Londres (2000)
9. Bangu, Sorin: Sobre la paradoja de Bertrand, Análisis 70 (1), 30-35 (2010)
10. Rowbottom, Darrell P. y Shackel, Nicholas: Pensamientos aleatorios de Bangu sobre la Paradoja de Bertrand, Análisis 70 (4), 689-69 (2010)
11. Marinoff, Louis: Una resolución de la paradoja de Bertrand, Phil. Sci. 61, 1-24 (1994)
12. Shackel, Nicholas: La Paradoja de Bertrand y el Principio de Indiferencia, Phil. Sci. 74, 150175 (2007)
13. Poincaré, Henri: Cálculo de Probabilidades. Gauthier-Villars, París (1912)
14. Jaynes, Edwin T.: El problema bien planteado, Found. Phys. 3, 477-493 (1973)
15. Holbrook, John y Kim, Sung Soo: La paradoja de Bertrand revisitada, The Mathematical Intelligencer 22, 16-19 (2000)
16. Di Porto, P., Crosignani, B., Ciattoni, A. y Liu, H. C.: Paradoja de Bertrand: una solución física. arXiv:1008.1878 [physics.data-an] (2010)

17. Di Porto, P., Crosignani, B., Ciattoni, A. y Liu, H. C.: Paradoja de Bertrand: una salida física siguiendo las líneas del experimento de lanzamiento de agujas de Buffon, Eur. J. Phys. 32, 819-825 (2011)
18. Wang, Jinchang: Paradoja de Bertrand y Distribución de Líneas, Actas de la Conferencia Anual de DSI, Nov. 2008, Baltimore, Maryland, 3031-3036 (2008)
19. Wang, Jinchang y Jackson, Rodger: Resolviendo la paradoja de probabilidad de Bertrand , Int. J. Open Problems Compt. Math. 4(3), 72-103 (2011)
20. Weisstein, Eric W.: "El Problema de Bertrand". Desde MathWorld–Un Recurso Web de Wolfram. http://mathworld.wolfram.com/BertrandsProblem.html. Accedido el 01 de diciembre de 2014
21. Rowbottom, Darrell P.: El Paradoxo de Bertrand revisado: Por qué las "soluciones" de Bertrand son todas inaplicables, Phil. Math. 21, 110-114 (2013)
22. Chiu, Samuel S. y Larson, Richard C.: El Paradoxo de Bertrand revisado: más lecciones sobre esa palabra ambigua, aleatorio, J. Ind. Sys. Eng. 3, 1-26 (2009)
23. Drory, A.: El Paradoxo de Bertrand: por qué las "soluciones" físicas fallan, (en preparación).
24. Aerts, Diederik, y Sassoli de Bianchi, Massimiliano: Resolviendo el problema difícil del Paradoxo de Bertrand (2014)