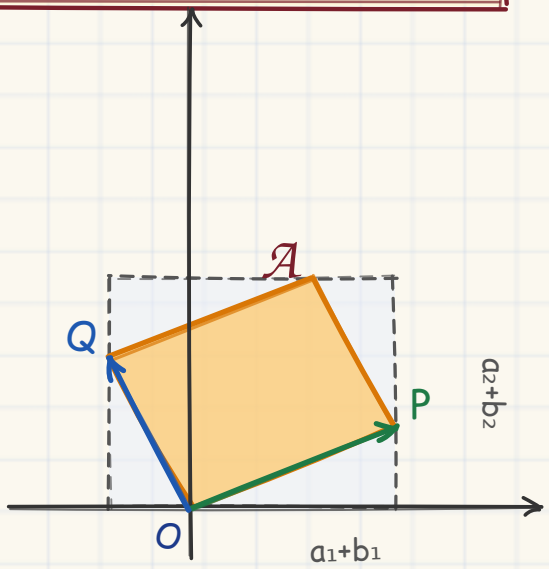
Dos veces el área, con rectángulos

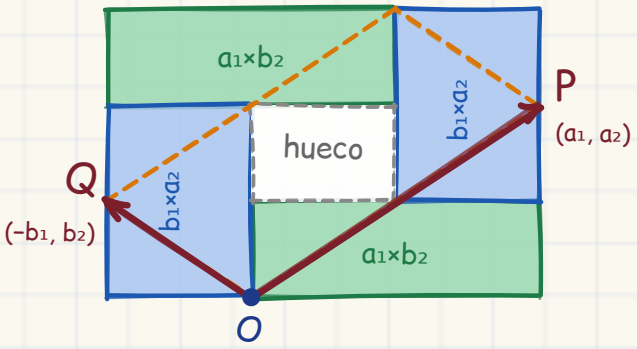
Con dos vectores P y Q del plano, el paralelogramo OPQ se mide con un rectángulo grande, otro que se resta y dos productos.

$$(a_1+b_1)(a_2+b_2) - (a_1-b_1)(a_2-b_2) = 2\,(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

- Tomamos $a_i = |p_i|$ y $b_i = |q_i|$. El rectángulo grande mide $(a_1+b_1) \times (a_2+b_2)$ y contiene al paralelogramo.
- La suma $\Sigma = a_1 b_2 + a_2 b_1$ es el determinante **sin** los signos menos (la «permanente»).
- Siempre pasa que $\mathcal{A} \le \Sigma$, donde A es el área del paralelogramo.
- Hay igualdad si y solo si $p_1 p_2 q_1 q_2 \le 0$: P y Q con «pendientes de signo opuesto», por ejemplo P en el cuadrante I y Q en el II.

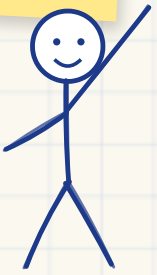


El rectángulo punteado tiene lados |p|+|q| en cada eje. Lo naranja es el paralelogramo.



Los vectores P = (a_1, a_2) y Q = $(-b_1, b_2)$ salen de O; su paralelogramo (naranja discontinuo) cabe en el contenedor, que se rellena con 2 rectángulos verdes, 2 azules y un hueco $(a_1-b_1)(a_2-b_2)$, que puede ser negativo.

Ojo: en 2D la igualdad puede darse con las 4 coordenadas distintas de 0 (basta $p_1 p_2 q_1 q_2 < 0$). En 3D eso no pasa.



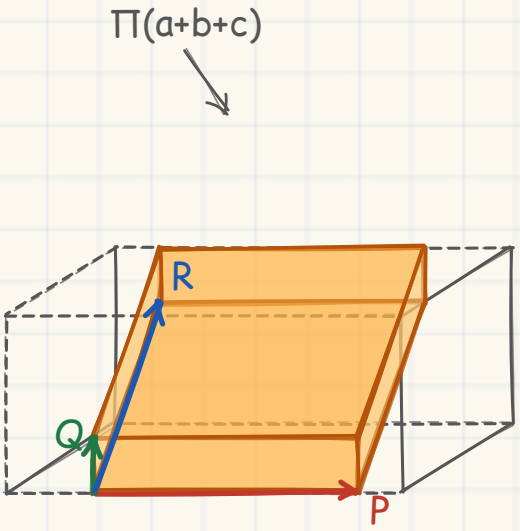
Cuatro veces el volumen, con ortoedros

Misma idea en 3D: un ortoedro grande, tres que se restan y una suma de seis productos.

$$\Pi(a+b+c) - \Pi(-a+b+c) - \Pi(a-b+c) - \Pi(a+b-c) = 4\Sigma$$

$$\Sigma = \Sigma\sigma\ a_\sigma(1) \cdot b_\sigma(2) \cdot c_\sigma(3) \text{ (seis sumandos)}$$

- Con $a=|p|$, $b=|q|$, $c=|r|$, el ortoedro grande mide $a_i+b_i+c_i$ y encierra al paralelepípedo.
- Σ = los 6 términos del determinante sin signos: la **permanente**.
- Siempre $4V \le 4\Sigma$ ($V = |\det|$). Igualdad si ningún término se cancela: todos los no nulos con el mismo signo.
- Se rellena con 16 ortoedros + 4 huecos + bloque central (24 ortoedros si los seis términos no son nulos).



El paralelepípedo (naranja) dentro de su ortoedro contenedor, con las caras paralelas a los planos coordenados.

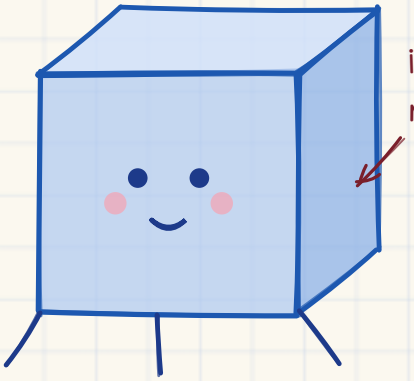
Los seis términos de Σ:

+ $a_1b_2c_3$	+ $a_2b_3c_1$	+ $a_3b_1c_2$
− $a_1b_3c_2$	− $a_2b_1c_3$	− $a_3b_2c_1$

+ y − son la signatura de la permutación

V = |suma con signo|, Σ = suma sin signos

Idea clave: V es el volumen de verdad. Σ lo iguala solo cuando los términos del determinante no se cancelan. Con las **9** coordenadas distintas de 0, **nunca**.



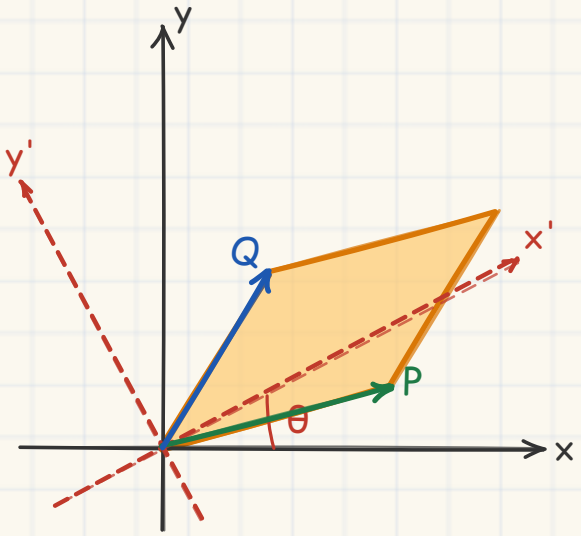
¿Y si giramos los ejes?

El área A no depende de los ejes, pero Σ sí. Girar los ejes equivale a girar el paralelogramo.

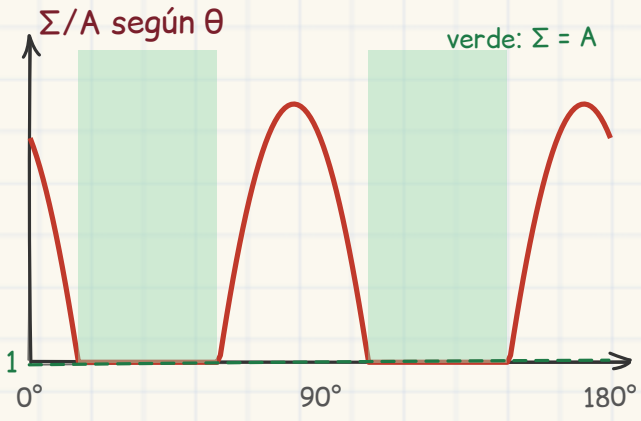
$$\Sigma \geq \mathcal{A} \text{ y } \Sigma - \mathcal{A} = 2 \cdot mín(\mathcal{T}+, \mathcal{T}-)$$

$\mathcal{T}+$ = suma de los términos del determinante que son positivos; $\mathcal{T}-$ = suma de los valores absolutos de los negativos. Así $A = T_+ - T_-$ y $\Sigma = T_+ + T_-$.

- Fijamos el paralelogramo y giramos el sistema de ejes un ángulo $\boldsymbol{\theta}$. Las coordenadas de P y Q cambian, y con ellas Σ.
- Con el eje x sobre P (marco adaptado), la coordenada p_2 vale 0 y sale $\boldsymbol{\Sigma = \mathcal{A}}$.
- La razón Σ/A se repite cada 90°.
- La fracción de giros con igualdad es $2\varphi/\pi$, siendo φ el ángulo agudo entre OP y OQ: cuanto más «abierto» el paralelogramo, más a menudo coincide.

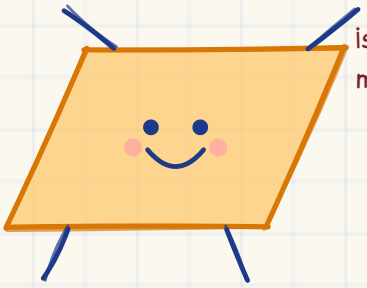


Negro: ejes originales. Rojo discontinuo: ejes girados θ. El paralelogramo no se mueve.



Curva calculada con P=(3; 0,8) y Q=(1,4; 2,3). Las franjas verdes son los giros en que hay igualdad.

Qué recordar: de infinitos giros posibles, hay intervalos de ejes «buenos» (verde) y el resto da Σ > A. El marco adaptado siempre es bueno.



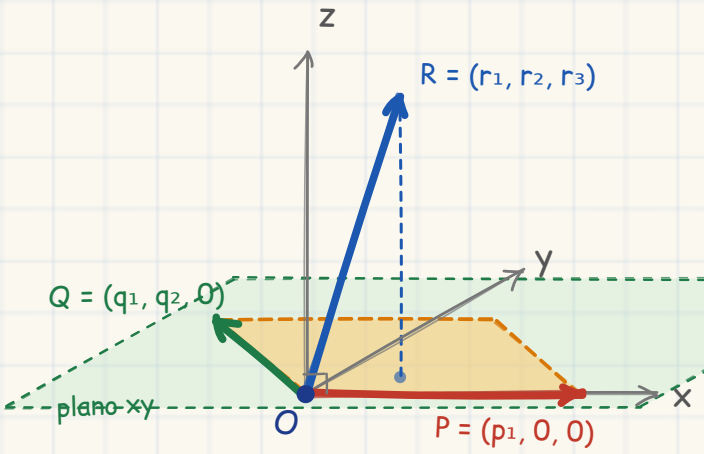
¡soy el paralelogramo! mírame con otros ejes

¿Siempre hay unos ejes buenos?

Dado un paralelepípedo, ¿existe un sistema de ejes ortonormales en el que $\Sigma = V$?

> *Sí: x sobre $\mathcal{P}$, plano xy con $Q \Rightarrow \Sigma = \mathcal{V}$*

- Eje x sobre P, plano xy con Q dentro, z perpendicular.
- La matriz queda **triangular inferior**: $p_2 = p_3 = q_3 = 0$. Solo sobrevive el término $p_1 q_2 r_3$, y así $\Sigma = \mathcal{V}$.
- Hay seis marcos así (según el orden de los vectores).
- No vale cualquiera: con las **9 coordenadas ≠ 0** es imposible; con ejes al azar casi siempre $\Sigma > \mathcal{V}$.



P sobre el eje x, Q dentro del plano xy (con $q_2 \geq 0$) y R libre: este es el «marco adaptado».

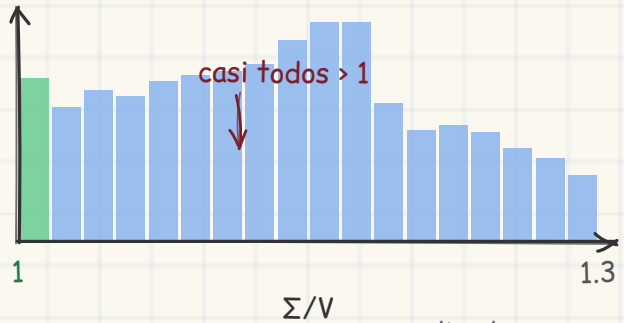
Coordenadas en ese marco:

P	p_1	0	0
Q	q_1	q_2	0
R	r_1	r_2	r_3

tres ceros ⇒ un solo término: $V = p_1 q_2 r_3$

En resumen: sí existe un sistema de ejes con $\Sigma = V$ (seis, de hecho), pero es una familia «delgada»: un giro pequeño suele romper la igualdad.

Σ/V con 4000 ejes al azar:





Dos veces el área de un paralelogramo, como diferencia de rectángulos

Es la versión plana de la identidad de los ortoedros: con dos vectores P y Q, el área del paralelogramo OPQ se obtiene a partir de un rectángulo grande, un rectángulo que se resta y una suma de dos productos. Veremos cuándo esa suma es exactamente el determinante, y por tanto dos veces el área, y cuándo no.

1. La identidad

$$\prod_{i=1}^{2}(a_i+b_i)-\prod_{i=1}^{2}(-a_i+b_i)=2\sum_{\sigma\in S_2}a_{\sigma(1)}b_{\sigma(2)}$$

Como solo hay dos factores, $\Pi(-a_i+b_i) = (-a_1+b_1)(-a_2+b_2) = (a_1-b_1)(a_2-b_2)$. La identidad se comprueba desarrollando: $(a_1+b_1)(a_2+b_2) - (a_1-b_1)(a_2-b_2) = 2a_1b_2 + 2a_2b_1$. Vale para números reales cualesquiera a_i, b_i ($i = 1, 2$).

Cómo se lee el segundo miembro

Colocamos los cuatro números en una matriz de dos filas, una por cada letra. Cada sumando toma **un elemento de cada fila y uno de cada columna**: la permutación $\sigma \in S_2$ decide la columna, de modo que se toma $a_{\sigma(1)}$ de la fila a y $b_{\sigma(2)}$ de la fila b.

$$\begin{pmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

Como S_2 tiene 2! = 2 permutaciones, la suma tiene dos sumandos:

$$\Sigma = a_1b_2 + a_2b_1$$

Es el desarrollo de un determinante 2×2 sin el signo menos: la *permanente* de la matriz. En 3D el factor era 4 y se restaban tres productos; en 2D el factor es 2 y se resta uno.

2. Los valores absolutos: P, Q y el paralelogramo

Partimos de dos vectores **P = (p_1, p_2)** y **Q = (q_1, q_2)**, es decir, OP y OQ desde el origen O, y tomamos como números de la identidad sus valores absolutos:

$$a_i = |p_i|, \quad b_i = |q_i|$$

O sea, la matriz de la identidad es la de los valores absolutos de la matriz que tiene por filas P y Q. Esto da cuatro lecturas:

- **Segundo miembro.** $2\Sigma = 2\cdot(|p_1q_2| + |p_2q_1|)$: los dos términos del determinante de P y Q, en valor absoluto y sumados.
- **Rectángulo grande.** $\Pi(a_i+b_i) = (a_1+b_1)(a_2+b_2)$ es el área del rectángulo que contiene al paralelogramo, con los lados paralelos a los ejes. En el eje i las coordenadas de los vértices O, P, Q, P+Q van desde la suma de las partes negativas de p_i y q_i hasta la suma de las positivas, así que su lado mide $|p_i|+|q_i|$, sean cuales sean los signos.
- **Rectángulo que se resta**, de lados $(-a_i+b_i)$, es decir, $(a_1-b_1)(a_2-b_2)$. Si un lado sale negativo y el otro no, su área cuenta con signo negativo.
- **Área del paralelogramo.** $A = |\det(P,Q)|$, con $\det(P,Q) = p_1q_2 - p_2q_1 = \Sigma_\sigma\, \varepsilon_\sigma\, p_{\sigma(1)}\, q_{\sigma(2)}$, donde $\varepsilon_\sigma = \pm 1$ es la signatura de la permutación.

> Como el valor absoluto de una suma nunca supera la suma de los valores absolutos, siempre se cumple **$2A \le \Pi(a+b) - \Pi(-a+b) = 2\Sigma$**. Lo que nos interesa es **cuándo hay igualdad**.

---

3. Cuándo la suma Σ es igual al determinante

Los dos términos del determinante son los dos sumandos de Σ con su signo ε_σ y con los signos de las coordenadas de P y Q:

$\sigma = (\sigma(1), \sigma(2))$	(1,2)	(2,1)
signatura ε_σ	+	−
término $p_{\sigma(1)}\, q_{\sigma(2)}$	p_1q_2	p_2q_1

Llamemos T_+ a la suma de los términos $\varepsilon_\sigma\cdot p\cdot q$ que son positivos y T_- a la suma de los valores absolutos de los que son negativos. Entonces

$$\det(P,Q) = T_+ - T_-, \qquad \Sigma = T_+ + T_-, \qquad \Sigma - |\det| = 2\cdot\mathrm{mín}(T_+,\, T_-)$$

> **Σ = |det| (y por tanto 2A = lado izquierdo) si y solo si los dos términos, p_1q_2 y $-p_2q_1$, no tienen signos contrarios.** Con solo dos términos eso se resume en una condición sencilla:
>
> $$p_1\, p_2\, q_1\, q_2 \le 0$$
>
> Es decir, P y Q deben tener «pendientes de signo opuesto»: uno en los cuadrantes I o III ($p_1p_2 > 0$) y el otro en el II o IV ($q_1q_2 < 0$), o alguno de los dos sobre un eje. Cuando no es así, $2\Sigma - 2A = 4\cdot\mathrm{mín}(T_+, T_-) > 0$.

El caso que vamos a construir

Tomamos **$p_1, p_2 \geq 0$**, **$q_1 \leq 0$** y **$q_2 \geq 0$**: P en el primer cuadrante y Q en el segundo, de modo que $p_1p_2q_1q_2 \leq 0$. Los dos términos cumplen:

término	ε_σ	signos de los factores	signo de p·q	$\varepsilon_\sigma \cdot p \cdot q$
p_1q_2	+	(≥0)(≥0)	≥ 0	**≥ 0**
p_2q_1	−	(≥0)(≤0)	≤ 0	**≥ 0**

Los dos términos aportan con signo positivo, nada se cancela:

$$\det(P,Q) = p_1q_2 - p_2q_1 = |p_1q_2| + |p_2q_1| = \Sigma$$

Por tanto A = det(P,Q) = Σ, y la identidad dice exactamente que **$2 \cdot A = \Pi(a+b) - \Pi(-a+b)$**. Si además $p_2 = 0$ o $q_1 = 0$, queda un solo término.

Contraste con el caso 3D. En 3D, con las nueve coordenadas distintas de 0 la igualdad era imposible. En 2D, en cambio, puede darse con las cuatro coordenadas no nulas: basta que $p_1p_2q_1q_2 < 0$, y eso ocurre «la mitad de las veces». En el plano solo hay dos términos y es fácil que no se cancelen.

---

4. Primer 2D: el caso en que coincide

Aquí se cumplen las condiciones de signo de la sección 3. Las figuras 4.1 a 4.4 muestran dos casos concretos. Qué mirar:

- El paralelogramo OPQ (naranja) dentro de su rectángulo contenedor, de lados a_i+b_i. En la figura 4.2 se ve lo que sobra: 4 triángulos rectángulos en las esquinas, dos de catetos a_1, a_2 y dos de catetos b_1, b_2. Por eso $A = (a_1+b_1)(a_2+b_2) - a_1a_2 - b_1b_2 = a_1b_2 + a_2b_1 = \Sigma$.
- El mismo rectángulo se tesela con 4 rectángulos: dos **verdes** de $a_1 \times b_2$ y dos **azules** de $b_1 \times a_2$, alrededor de un hueco de lados $|a_1-b_1|$ y $|a_2-b_2|$. Su área total es 2Σ, así que $\Pi(a+b) - (a_1-b_1)(a_2-b_2) = 2\Sigma = 2A$.
- Si $(a_1-b_1)(a_2-b_2) < 0$ los rectángulos se solapan (zona amarilla) en lugar de dejar hueco, y ese hueco cuenta negativo.
- La figura 4.4 separa los rectángulos del centro para verlos por separado.

$a_1 \times b_2$ $b_1 \times a_2$ hueco solape (hueco negativo) paralelogramo

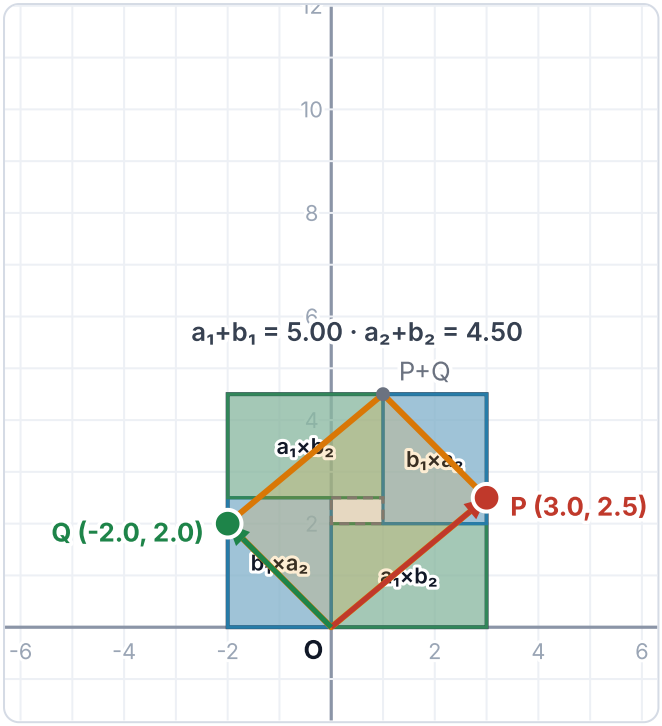


Figura 4.1. P=(3, 2.5), Q=(−2, 2). El rectángulo mide 5×4.5 = 22.5. Los 4 rectángulos (dos verdes de $a_1 \times b_2$ = 6 y dos azules de $b_1 \times a_2$ = 5) suman 22 = 2Σ, y el hueco $(a_1-b_1)(a_2-b_2)$ = 0.5 completa el rectángulo: 22 + 0.5 = 22.5. Por tanto 2A = 22.5 − 0.5 = 22.

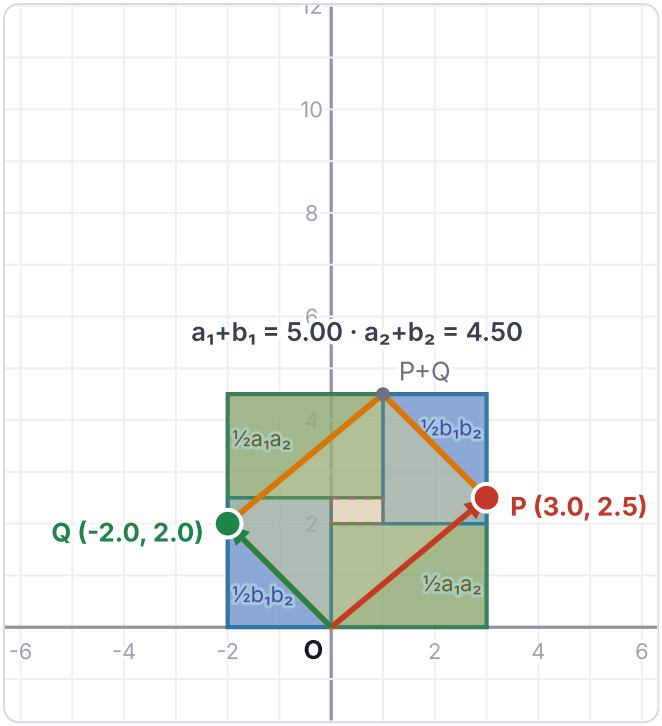


Figura 4.2. El mismo caso con los 4 triángulos de las esquinas: dos de catetos a_1, a_2 ($\frac{1}{2}a_1a_2$ = 3.75 cada uno) y dos de catetos b_1, b_2 ($\frac{1}{2}b_1b_2$ = 2 cada uno). Así A = 22.5 − a_1a_2 − b_1b_2 = 22.5 − 7.5 − 4 = 11 = Σ.

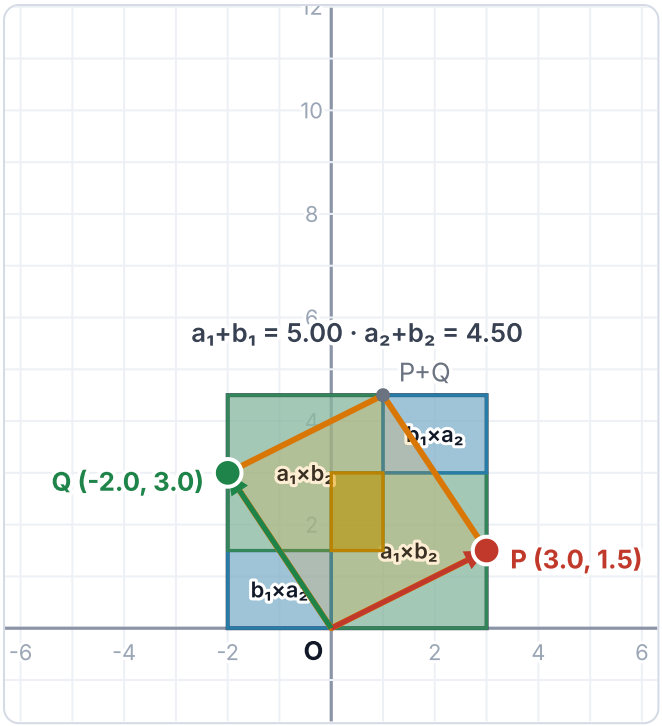


Figura 4.3. P=(3, 1.5), Q=(−2, 3). Aquí $(a_1-b_1)(a_2-b_2)$ = 1·−1.5 = −1.5 < 0: los rectángulos se solapan (zona amarilla, de área 1.5) en lugar de dejar hueco, y ese hueco cuenta negativo. La identidad sigue valiendo: 22.5 − (−1.5) = 24 = 2Σ = 2A.

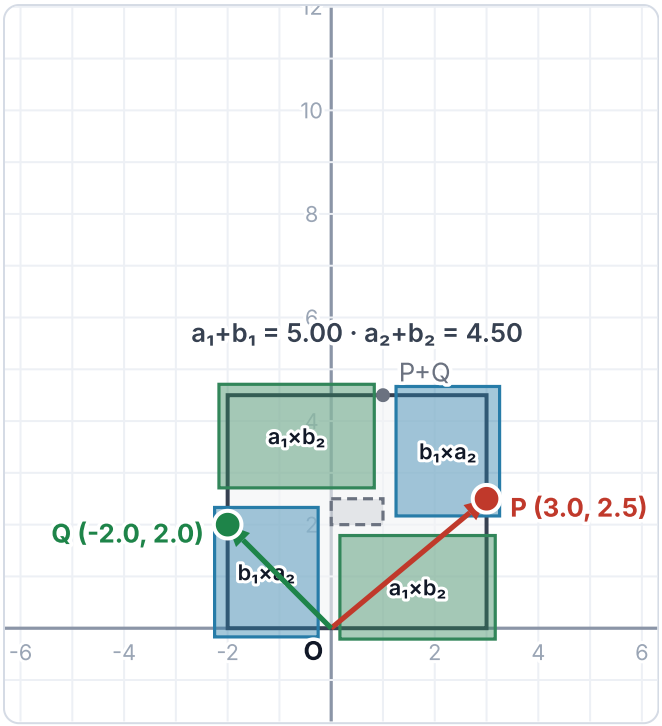


Figura 4.4. Los mismos 4 rectángulos y el hueco del caso 4.1, separados del centro para verlos por separado (sin el paralelogramo).

5. Cuándo NO sale la suma igual al determinante

La identidad del apartado 1 es cierta siempre: el lado izquierdo es siempre 2Σ. Lo que puede fallar es que Σ sea igual a $|\det|$, y por tanto que ese lado izquierdo sea $2A$. Falla cuando p_1q_2 y $-p_2q_1$ tienen signos contrarios, porque entonces se restan en el determinante pero se suman en Σ, que toma valores absolutos. La diferencia es exactamente **$2\Sigma - 2A = 4\cdot\text{mín}(T_+, T_-)$**.

Casos típicos (cada tarjeta indica la figura de la sección 6 que lo ilustra):

A. Misma «pendiente» ($p_1p_2q_1q_2 > 0$)

Si P y Q están los dos en los cuadrantes I o III (o los dos en II o IV), el paralelogramo es «más estrecho»: su área es la diferencia de los rectángulos a_1b_2 y a_2b_1, no su suma. Ejemplo: P=(3, 1.5), Q=(1.5, 3).

Ver la figura 6.4.

B. Se cambia un signo

Cambiar el signo de una sola coordenada invierte el signo de $p_1p_2q_1q_2$, así que se pasa de «coincide» a «no coincide» (y al revés), salvo que alguna coordenada sea 0.

Ver las figuras 6.1, 6.5.

C. Vectores paralelos

Si $Q = \lambda P$, el paralelogramo es plano ($A = 0$) pero $p_1p_2q_1q_2 = \lambda^2(p_1p_2)^2 \geq 0$, así que p_1q_2 y $-p_2q_1$ valen lo mismo con signos contrarios: se cancelan en el determinante y se suman en Σ.

Ver la figura 6.6.

D. Casos que SÍ coinciden

Otros cuadrantes con pendientes de signo opuesto (P en IV y Q en I, o el orden invertido, donde $\det < 0$ pero $|\det| = \Sigma$), un vector sobre un eje, o los dos vectores sobre los ejes (el paralelogramo es un rectángulo).

Ver las figuras 6.2, 6.3, 6.7, 6.8.

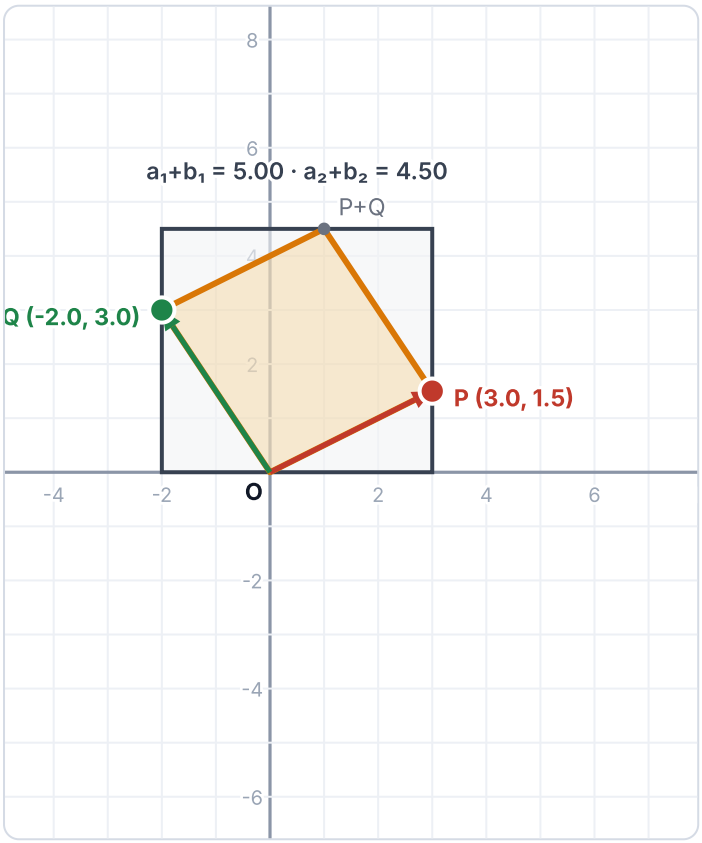
6. Segundo 2D: signos libres

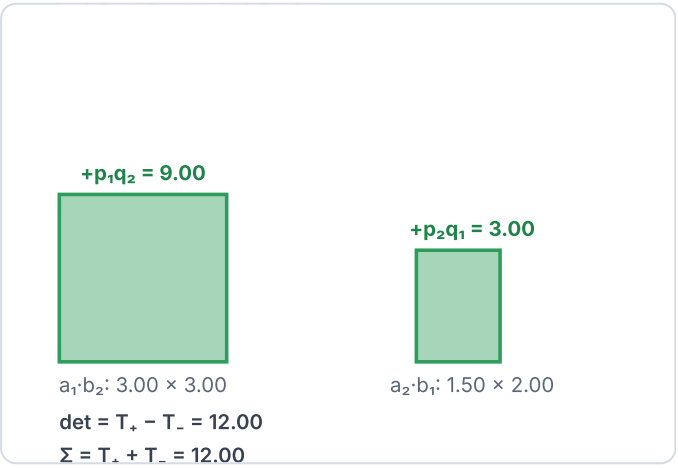
Ahora P y Q pueden tener cualquier signo. Cada figura muestra un ejemplo; observa en cada una:

- El paralelogramo y su rectángulo contenedor, cuyos lados son siempre a_i+b_i.
- A la derecha, los dos rectángulos de lados $a_1\times b_2$ y $a_2\times b_1$. Cada uno es **verde** si su término $\varepsilon_\sigma\cdot p\cdot q$ es positivo (suma en el determinante), **rojo** si es negativo (resta) y **gris** si vale 0. Se tiene det = (verde) − (rojo), mientras que Σ = (verde) + (rojo).
- Debajo de cada figura se dice si sale $\Sigma = |\det|$ y por qué, con el valor de $p_1p_2q_1q_2$ y el exceso $4\cdot\text{mín}(T_+, T_-)$ cuando no.

suma · resta · nulo · paralelogramo · rectángulo contenedor

Figura 6.1 — Caso del 1.er 2D P=(3, 1.5), Q=(−2, 3)



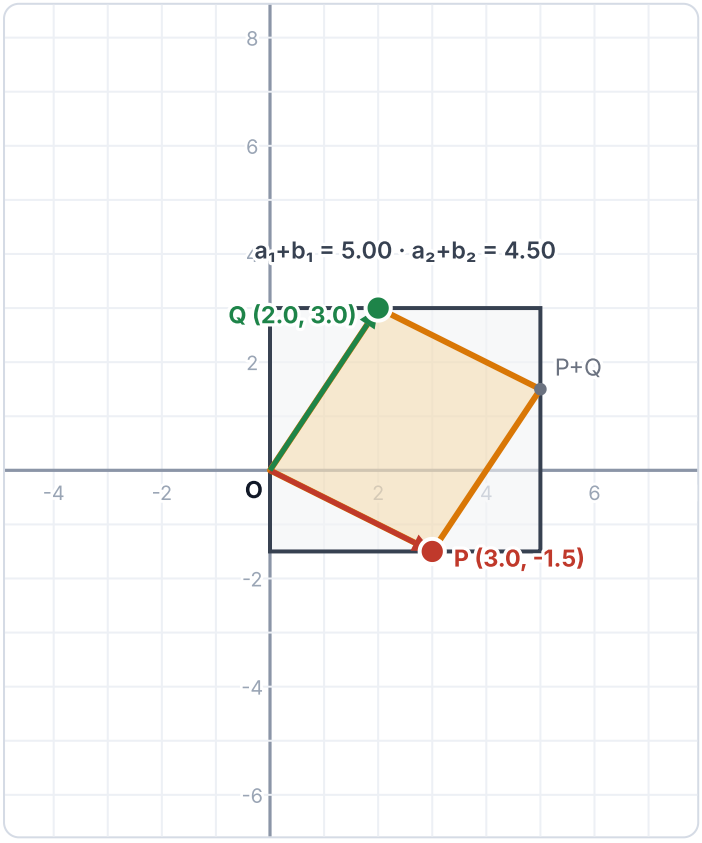


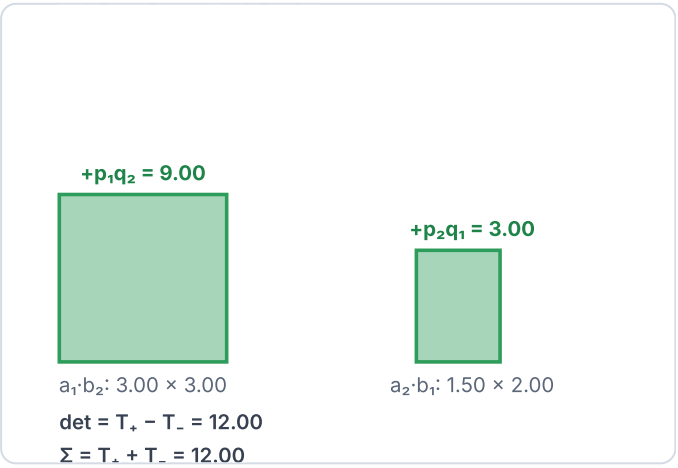
✔ **Sí: Σ = |det| = 12.00.** Los dos términos (**+p₁q₂, −p₂q₁**) aportan con el mismo signo (+), así que en el determinante no se cancela nada y 2A = lado izquierdo = 24.00.

$p_1p_2q_1q_2$ = -27.00 ≤ 0.

2A = 24.00 exceso = 0.00 total 2Σ = 24.00

Figura 6.2 — P en el cuadrante IV P=(3, −1.5), Q=(2, 3)



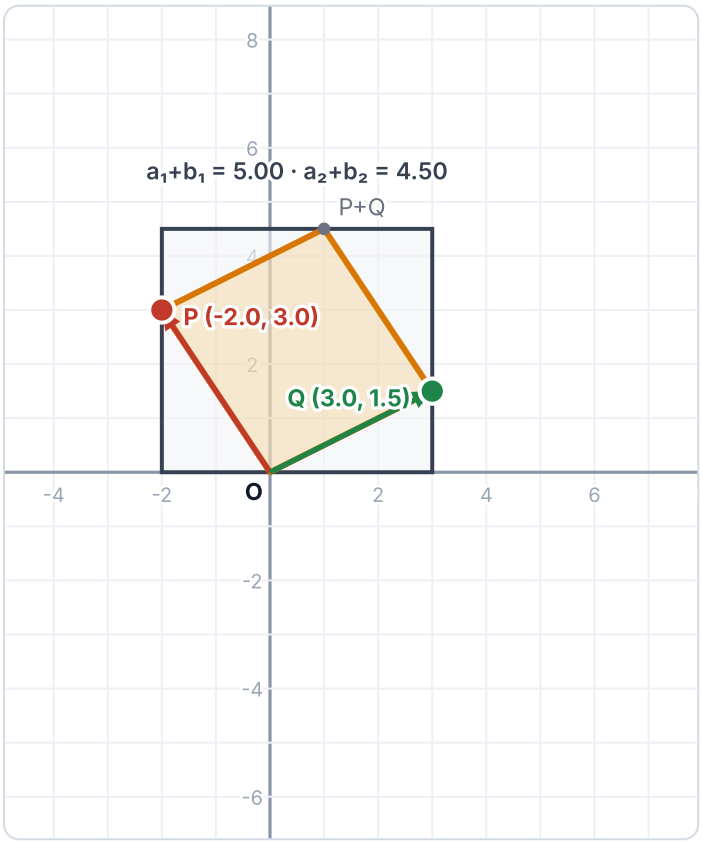


✔ **Sí: Σ = |det| = 12.00.** Los dos términos (**+p₁q₂, −p₂q₁**) aportan con el mismo signo (+), así que en el determinante no se cancela nada y 2A = lado izquierdo = 24.00.

$p_1p_2q_1q_2$ = -27.00 ≤ 0.

2A = 24.00 exceso = 0.00 total 2Σ = 24.00

Figura 6.3 — Orden invertido (det<0) P=(−2, 3), Q=(3, 1.5)





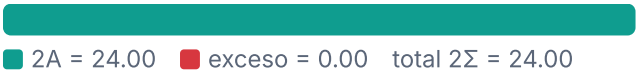
det = $T_+ - T_-$ = -12.00

Σ = $T_+ + T_-$ = 12.00

✔ **Sí: Σ = |det| = 12.00.** Los dos términos (**$+p_1q_2$**, **$-p_2q_1$**) aportan con el mismo signo (−), así que en el determinante no se cancela nada y 2A = lado izquierdo = 24.00.

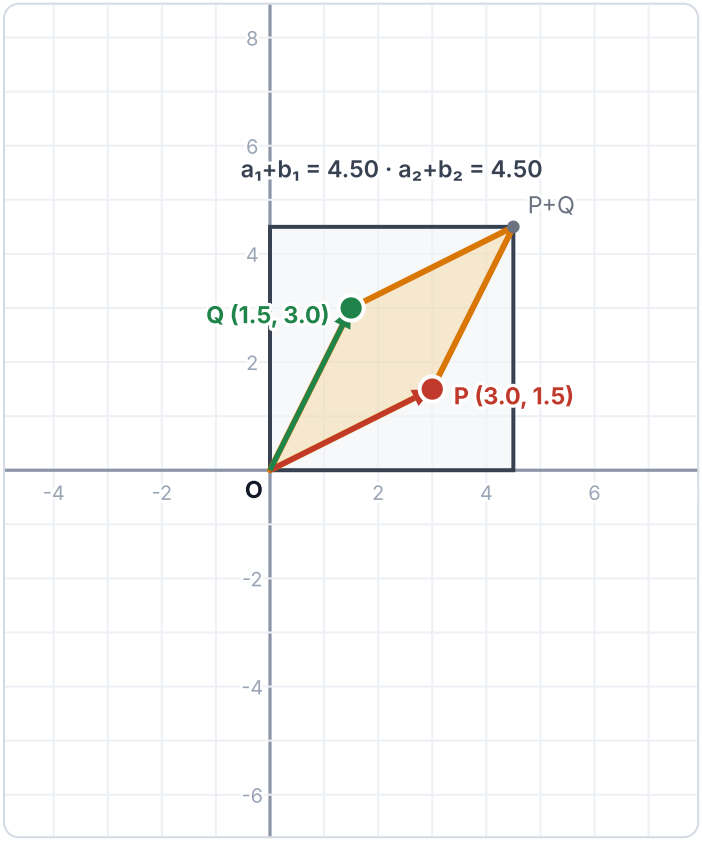
$p_1p_2q_1q_2$ = -27.00 ≤ 0.

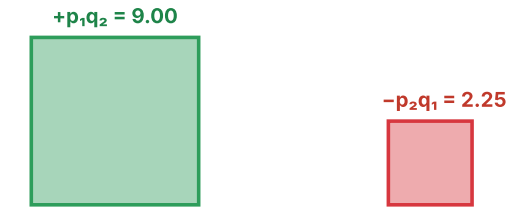
El determinante sale negativo (det = -12.00): P, Q tienen la orientación contraria, pero el área es |det| = Σ.



2A = 24.00 exceso = 0.00 total 2Σ = 24.00

Figura 6.4 — P y Q en el cuadrante I P=(3, 1.5), Q=(1.5, 3)





det = $T_+ - T_-$ = 6.75

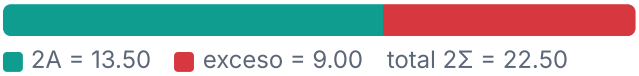
Σ = $T_+ + T_-$ = 11.25

✘ **No: Σ > |det|.** Suma: **$+p_1q_2$** (T_+ = 9.00). Resta: **$-p_2q_1$** (T_- = 2.25).

En el determinante se restan (det = $T_+ - T_-$ = 6.75, A = 6.75), pero en Σ se suman (Σ = $T_+ + T_-$ = 11.25). El lado izquierdo sigue siendo 2Σ = 22.50, y supera a 2A en 4·mín(T_+, T_-) = **9.00**.

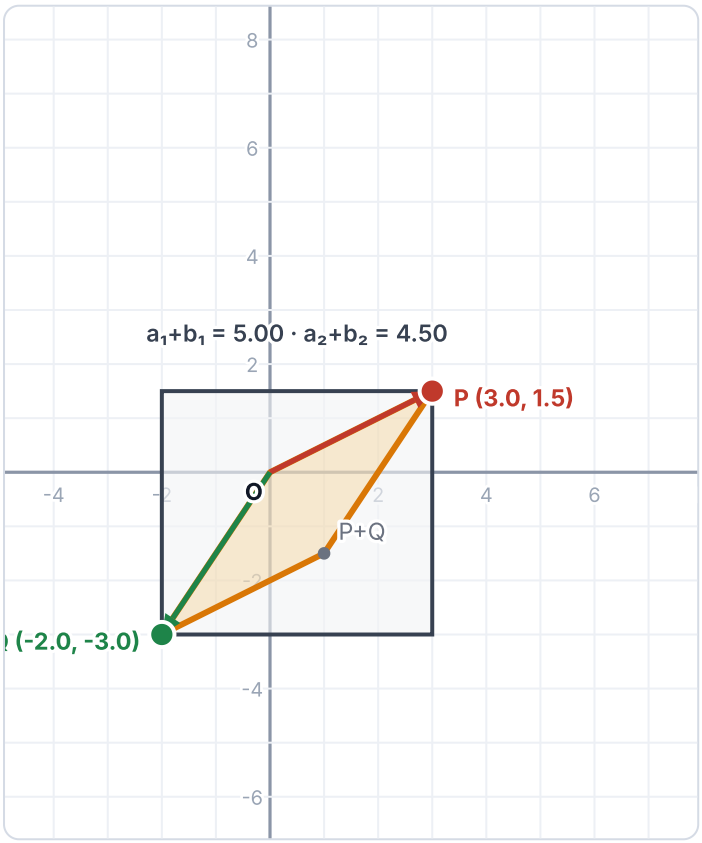
$p_1p_2q_1q_2$ = 20.25 > 0.

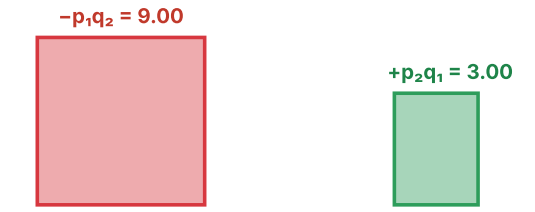
P está en el cuadrante I y Q en el I: los dos tienen el mismo tipo de pendiente (I y III, o II y IV).



2A = 13.50 exceso = 9.00 total 2Σ = 22.50

Figura 6.5 — $q_2<0$ P=(3, 1.5), Q=(−2, −3)





$a_1 \cdot b_2$: 3.00 × 3.00 $a_2 \cdot b_1$: 1.50 × 2.00

det = $T_+ - T_-$ = -6.00

$\Sigma = T_+ + T_-$ = 12.00

✘ **No: Σ > |det|.** Suma: **$-p_2q_1$** (T_+ = 3.00). Resta: **$+p_1q_2$** (T_- = 9.00).

En el determinante se restan (det = $T_+ - T_-$ = -6.00, A = 6.00), pero en Σ se suman ($\Sigma = T_+ + T_-$ = 12.00). El lado izquierdo sigue siendo 2Σ = 24.00, y supera a 2A en 4·mín(T_+, T_-) = **12.00**.

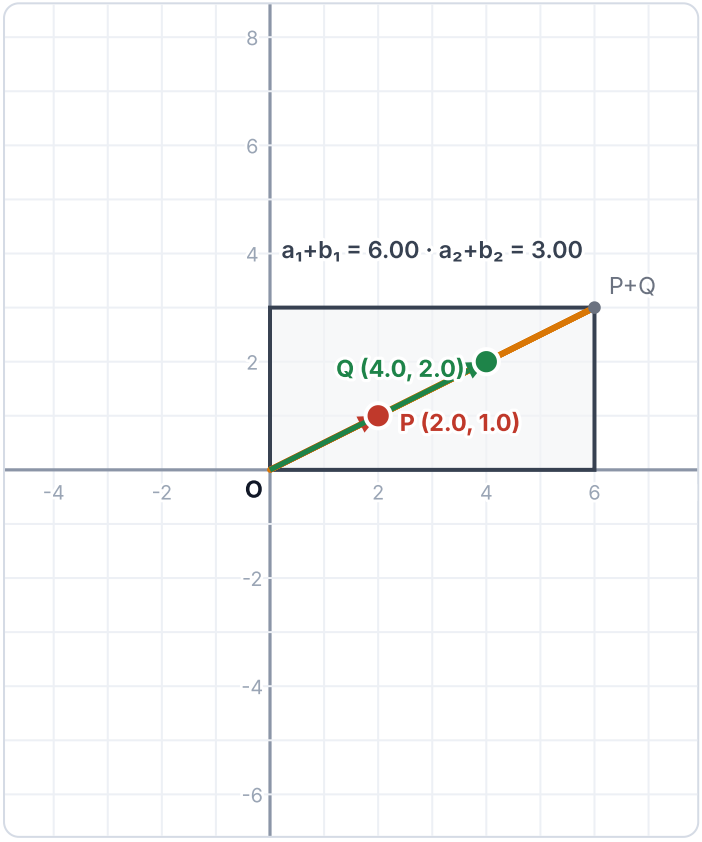
$p_1p_2q_1q_2$ = 27.00 > 0.

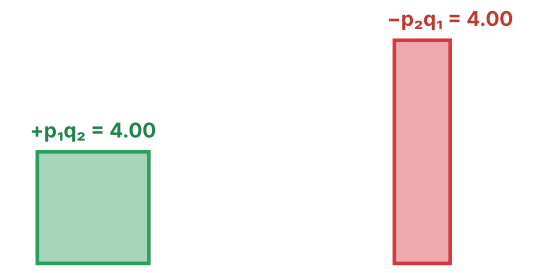
P está en el cuadrante I y Q en el III: los dos tienen el mismo tipo de pendiente (I y III, o II y IV).



2A = 12.00 exceso = 12.00 total 2Σ = 24.00

Figura 6.6 — Paralelos (A=0) P=(2, 1), Q=(4, 2)





$a_1 \cdot b_2$: 2.00 × 2.00 $a_2 \cdot b_1$: 1.00 × 4.00

det = $T_+ - T_-$ = 0.00

$\Sigma = T_+ + T_-$ = 8.00

✘ **No: Σ > |det|.** Suma: **$+p_1q_2$** (T_+ = 4.00). Resta: **$-p_2q_1$** (T_- = 4.00).

En el determinante se restan (det = $T_+ - T_-$ = 0.00, A = 0.00), pero en Σ se suman ($\Sigma = T_+ + T_-$ = 8.00). El lado izquierdo sigue siendo 2Σ = 16.00, y supera a 2A en 4·mín(T_+, T_-) = **16.00**.

$p_1p_2q_1q_2$ = 16.00 > 0.

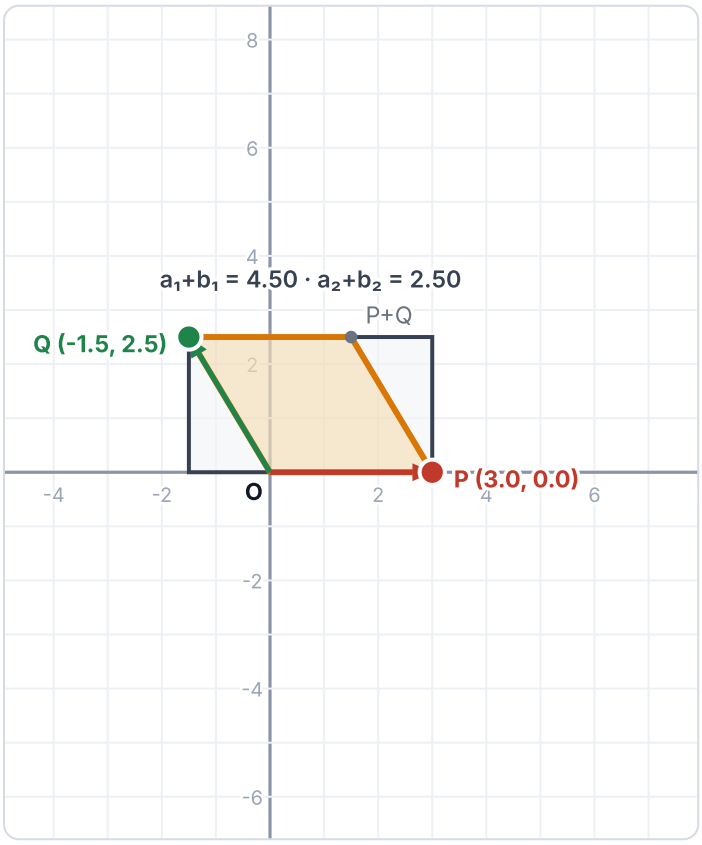
P está en el cuadrante I y Q en el I: los dos tienen el mismo tipo de pendiente (I y III, o II y IV).

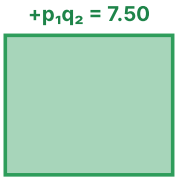
Aquí A = 0 (paralelogramo plano) pero Σ > 0.



2A = 0.00 exceso = 16.00 total 2Σ = 16.00

Figura 6.7 — P sobre un eje P=(3, 0), Q=(−1.5, 2.5)





$+p_1q_2 = 7.50$

$p_2q_1 = 0.00$

$a_1 \cdot b_2$: 3.00 × 2.50

$a_2 \cdot b_1$: 0.00 × 1.50

$\det = T_+ - T_- = 7.50$

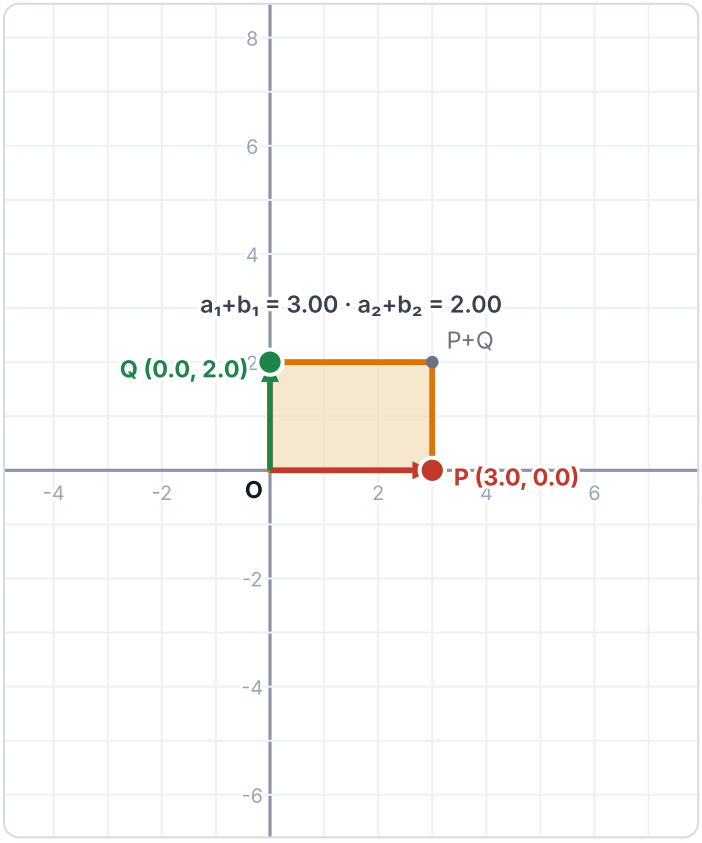
$\Sigma = T_+ + T_- = 7.50$

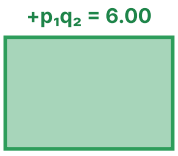
✔ **Sí: Σ = |det| = 7.50.** El único término no nulo es $+p_1q_2$, y no hay otro con el que cancelarse, así que en el determinante no se cancela nada y 2A = lado izquierdo = 15.00.

$p_1p_2q_1q_2 = 0.00 \le 0.$

2A = 15.00 exceso = 0.00 total 2Σ = 15.00

Figura 6.8 — Rectángulo P=(3, 0), Q=(0, 2)





$+p_1q_2 = 6.00$

$p_2q_1 = 0.00$

$a_1 \cdot b_2$: 3.00 × 2.00

$a_2 \cdot b_1$: 0.00 × 0.00

$\det = T_+ - T_- = 6.00$

$\Sigma = T_+ + T_- = 6.00$

✔ **Sí: Σ = |det| = 6.00.** El único término no nulo es $+p_1q_2$, y no hay otro con el que cancelarse, así que en el determinante no se cancela nada y 2A = lado izquierdo = 12.00.

$p_1p_2q_1q_2 = 0.00 \le 0.$

2A = 12.00 exceso = 0.00 total 2Σ = 12.00

7. Resumen

- Siempre: $\Pi(a_i+b_i) - \Pi(-a_i+b_i) = 2\Sigma$, con a, b los valores absolutos de las coordenadas de P y Q.

- Siempre: $2A \le 2\Sigma$, y $2\Sigma - 2A = 4 \cdot \text{mín}(T_+, T_-)$.
- Hay igualdad exactamente cuando $p_1 p_2 q_1 q_2 \le 0$, es decir, cuando los dos términos del determinante no se cancelan. Con $p_1, p_2 \ge 0$, $q_1 \le 0$, $q_2 \ge 0$ se cumple, y entonces el rectángulo grande menos el rectángulo que se resta es exactamente 2 veces el área del paralelogramo.
- Cambiar el signo de una sola coordenada alterna entre «coincide» y «no coincide».

Dado un paralelogramo, ¿existe un sistema de coordenadas en el que siempre A = Σ?

El área A de un paralelogramo no depende de los ejes que usemos, pero la suma Σ = $|p_1q_2| + |p_2q_1|$ sí. Siempre Σ ≥ A. Aquí estudiamos si, dado el paralelogramo, se pueden elegir ejes ortonormales para que se dé la igualdad, y qué proporción de los sistemas la cumplen. En el plano, a diferencia del espacio, es una proporción apreciable.

1. La pregunta

Un paralelogramo con un vértice en el origen O queda determinado por dos vectores OP y OQ. Si elegimos un sistema de ejes ortonormales, P y Q tienen coordenadas $\mathrm{P} = (\mathrm{p}_1,\, \mathrm{p}_2)$ y $\mathrm{Q} = (\mathrm{q}_1,\, \mathrm{q}_2)$. Definimos

$$\Sigma(\mathrm{M}) = |p_1q_2| + |p_2q_1| \quad , \quad \mathrm{A} = |\det \mathrm{M}| = |p_1q_2 - p_2q_1|$$

Es la suma de los dos productos del determinante con valores absolutos. Con $a_i = |p_i|$ y $b_i = |q_i|$, es la Σ de las páginas anteriores, y la identidad en el plano es

$$\underbrace{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}_{\text{contenedor}} - \underbrace{(-a_1+b_1)(-a_2+b_2)}_{\text{hueco}} = 2\,(a_1b_2 + a_2b_1) = 2\Sigma$$

Cuando además A = Σ, el doble del área del paralelogramo es la diferencia de dos rectángulos: el contenedor, de lados a_i+b_i, menos el hueco, de lados $-a_i+b_i$ (que cuenta con signo).

- **A no cambia al girar los ejes**: A = |det M|, y girar los ejes multiplica M por una matriz ortogonal.
- **Σ sí cambia**, porque cambian las coordenadas.
- **Siempre Σ ≥ A**, porque $A = |T_+ - T_-| \le T_+ + T_- = \Sigma$. Aquí T_+ y T_- son los valores absolutos de los términos que suman o restan en el determinante $p_1q_2 - p_2q_1$. La diferencia es **$\Sigma - A = 2\cdot\text{mín}(T_+, T_-)$**.

> **Pregunta.** Fijado el paralelogramo, ¿existe un sistema de ejes ortonormales con Σ = A? ¿Y en qué proporción de los sistemas?

2. Respuesta: sí existe, siempre

Basta tomar el eje x en la dirección de P. Entonces $\mathrm{P} = (\mathrm{p}_1,\, 0)$ y $\mathrm{Q} = (\mathrm{q}_1,\, \mathrm{q}_2)$, y el determinante se reduce a un solo término:

$$\det \mathrm{M} = p_1 q_2 - 0 \cdot q_1 = p_1 q_2, \quad \Sigma = |p_1 q_2| + 0 = |\det \mathrm{M}| = \mathrm{A}$$

No hay otro término con el que cancelarse, así que **Σ = A**. Esto vale para cualquier paralelogramo y también si el eje x se pone sobre Q: hay dos sistemas adaptados, uno por vector (y los que resultan de girarlos 90° o 180°, que cambian a Σ solo por permutar o cambiar de signo las coordenadas).

Qué pasa con la figura. En esos ejes Σ = $a_1 \cdot b_2$, de modo que el rectángulo de lados a_1 y b_2 tiene exactamente el área del paralelogramo (base por altura), y 2A es el área de dos copias de ese rectángulo.

---

3. Y en el resto de los sistemas

La igualdad Σ = A se da exactamente cuando los dos términos $p_1 q_2$ y $-p_2 q_1$ no tienen signos contrarios, es decir, cuando

$$p_1 p_2 q_1 q_2 \leq 0$$

Esto significa que P y Q están en cuadrantes de «pendiente» de distinto tipo: uno en los cuadrantes I o III ($p_1 p_2 > 0$) y el otro en el II o el IV ($q_1 q_2 < 0$), o uno de ellos sobre un eje. Y aquí aparece una diferencia clara con el espacio:

- **En el plano, con las cuatro coordenadas no nulas puede haber igualdad.** Basta que P y Q estén en cuadrantes de pendiente opuesta. Por eso el conjunto de giros θ buenos contiene intervalos enteros, no solo ángulos aislados.
- Si φ es el ángulo agudo que forman las rectas OP y OQ ($0 \leq \varphi \leq 90°$), la proporción de giros θ para los que se da Σ = A es exactamente **2φ/π**. Si P ⊥ Q, vale 1: Σ = A *en cualquier sistema*, porque el paralelogramo es un rectángulo. Si P y Q son casi paralelos, la proporción es casi 0.
- **En el espacio** (página anterior) con las nueve coordenadas no nulas la igualdad es imposible, y los ejes buenos forman una familia delgada.

Se muestra con ejemplos del plano en los que se gira el sistema de ejes, y con gráficas de Σ/A en función del ángulo, con los intervalos de igualdad sombreados.

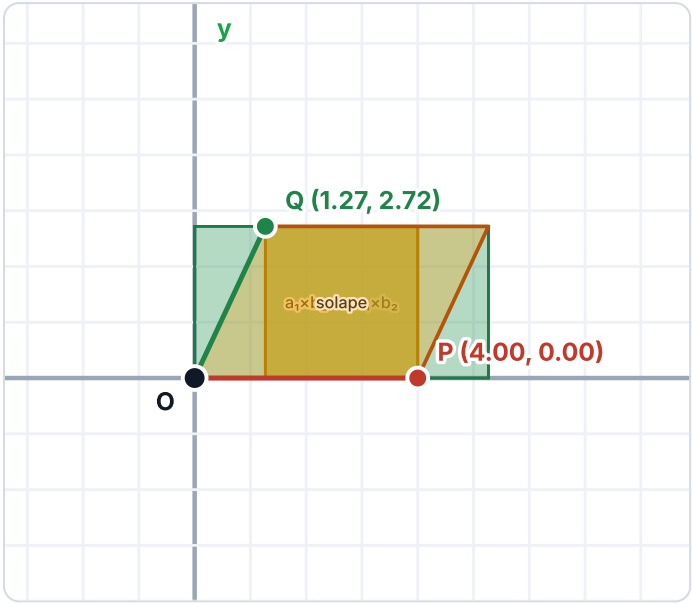
---

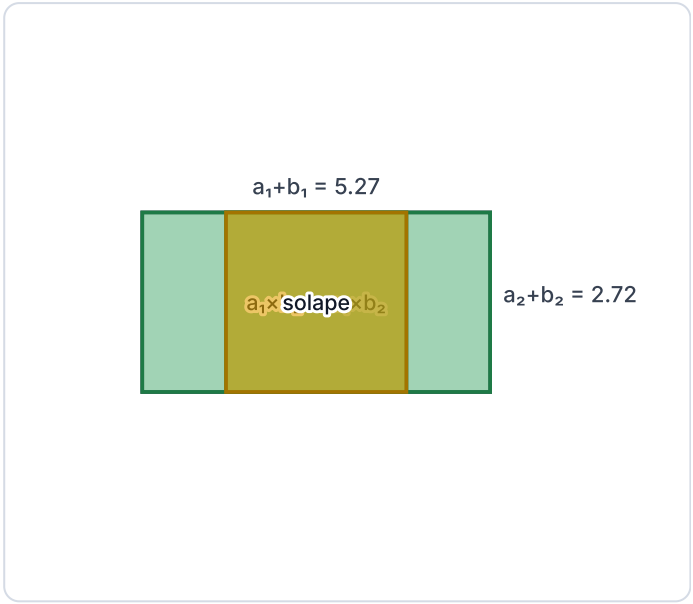
4. Ejemplos con el paralelogramo y los ejes

Cada figura muestra, a la izquierda, el paralelogramo de lados P y Q con los ejes de coordenadas, y a la derecha el rectángulo contenedor de lados $a_i + b_i$ (el más pequeño con lados paralelos a los ejes) relleno con 4 rectángulos y un hueco. El hueco cuenta con signo: si es negativo, los rectángulos se solapan y se ve en amarillo. El paralelogramo se da con |P|, |Q| y el ángulo entre ellos; el sistema de ejes con el **marco base** (x sobre P o x sobre Q, en ambos Σ = A) y un **giro θ** alrededor de O. Girar los ejes equivale a girar el paralelogramo dentro de unos ejes fijos.

$a_1 \times b_2$ $b_1 \times a_2$ hueco solape (hueco negativo) paralelogramo contenedor

Figura 4.1 — Marco adaptado (x ∥ P) $|P|=4$, $|Q|=3$, $\angle PQ=65°$, x ∥ P, $\theta=0°$





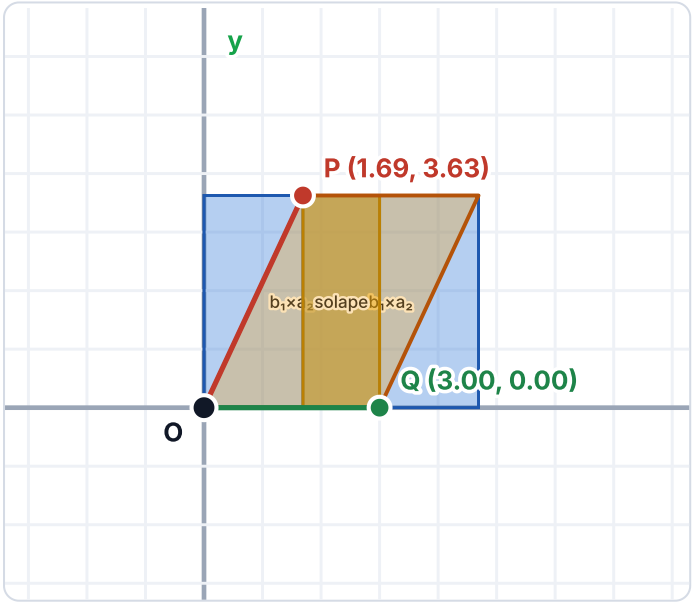
✔ **Sí: Σ = A = 10.88.** Solo hay un término no nulo, $+p_1q_2$, y no tiene con quién cancelarse.

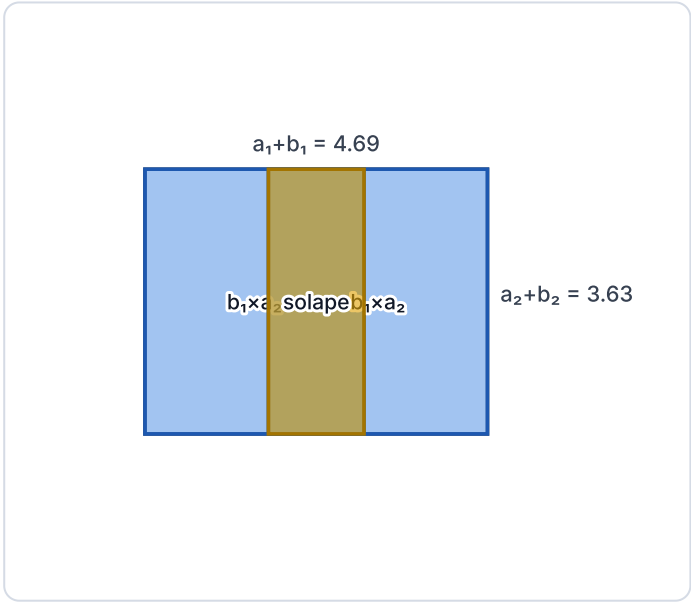
$p_1p_2q_1q_2 = 0.00 \le 0$ (cuadrantes de pendiente opuesta o algún cero). Coordenadas nulas: 1 de 4.

P	4.00	0.00
Q	1.27	2.72

término	signo	valor	valor abs.
p_1q_2	+	10.88	10.88
p_2q_1	−	0.00	0.00

Figura 4.2 — Marco adaptado (x ∥ Q) $|P|=4$, $|Q|=3$, $\angle PQ=65°$, x ∥ Q, $\theta=0°$





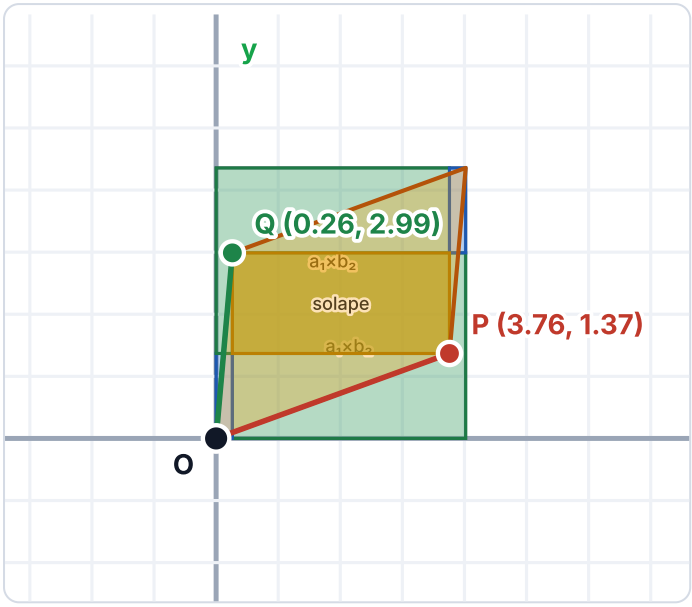
✔ **Sí: Σ = A = 10.88.** Solo hay un término no nulo, $-p_2q_1$, y no tiene con quién cancelarse.

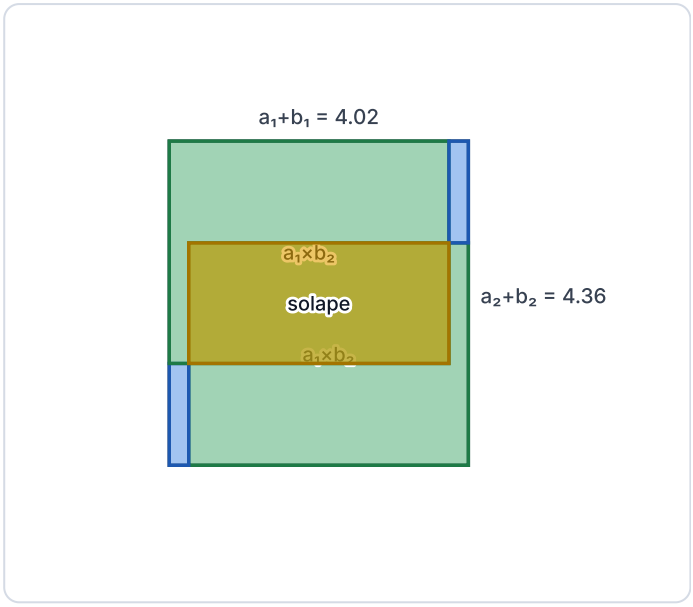
$p_1p_2q_1q_2 = 0.00 \le 0$ (cuadrantes de pendiente opuesta o algún cero). Coordenadas nulas: 1 de 4.

P	1.69	3.63
Q	3.00	0.00

término	signo	valor	valor abs.
p_1q_2	+	0.00	0.00
p_2q_1	−	-10.88	10.88

Figura 4.3 — Giro de 20° |P|=4, |Q|=3, ∠PQ=65°, x ∥ P, θ=20°





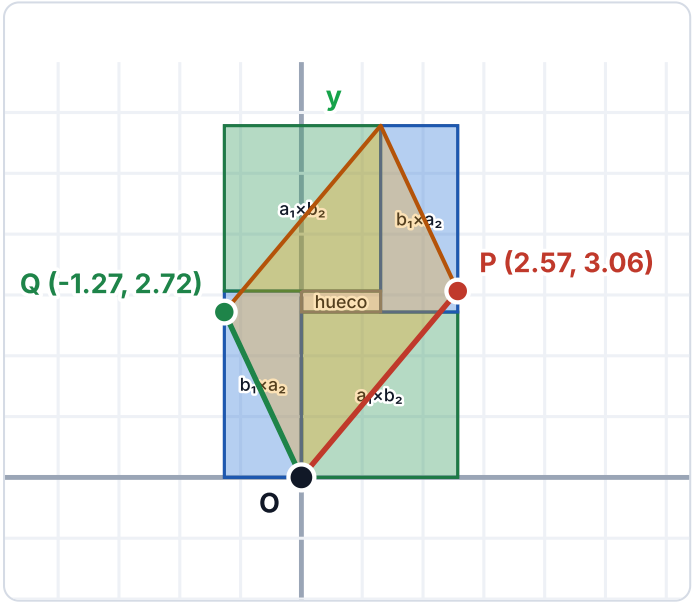
✘ **No: Σ > A.** Un término suma y el otro resta: **+p₁q₂** suma, **−p₂q₁** resta. En el determinante se compensan (A = 10.88); en Σ todo suma (Σ = 11.59). La diferencia es 2·mín(T₊, T₋) = **0.72**.

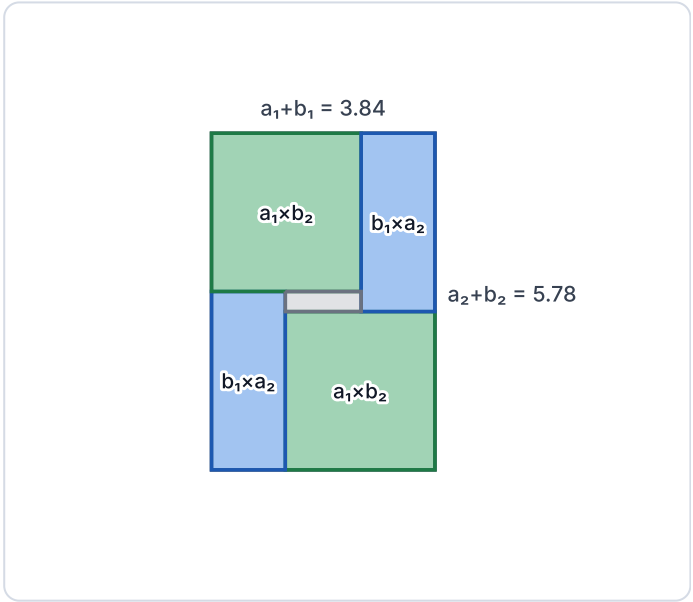
$p_1p_2q_1q_2$ = 4.02 > 0 (P y Q en cuadrantes de la misma pendiente). Coordenadas nulas: 0 de 4.

P	3.76	1.37
Q	0.26	2.99

término	signo	valor	valor abs.
p_1q_2	+	11.23	11.23
p_2q_1	−	-0.36	0.36

Figura 4.4 — Giro de 50° |P|=4, |Q|=3, ∠PQ=65°, x ∥ P, θ=50°





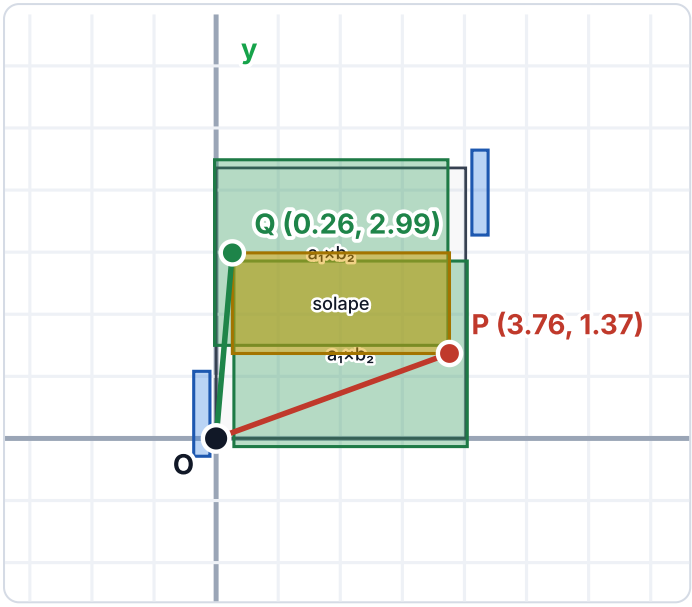
✔ **Sí: Σ = A = 10.88.** Los dos términos (**+p₁q₂**, **−p₂q₁**) aportan con el mismo signo (+).

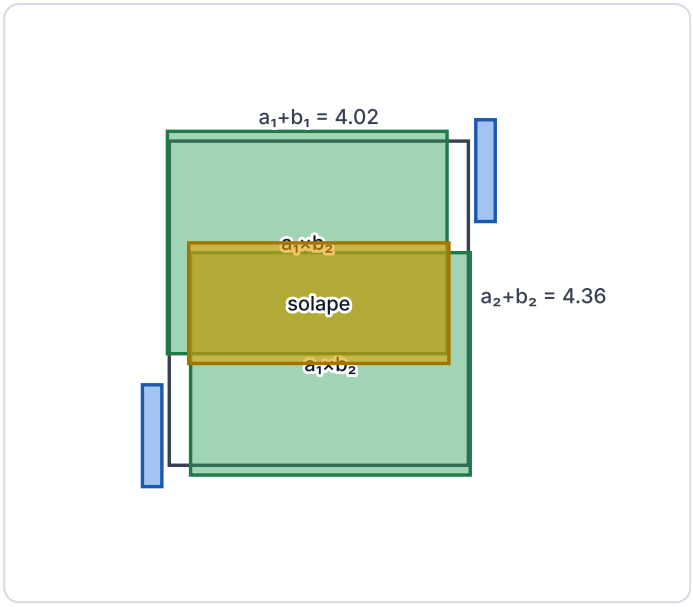
$p_1p_2q_1q_2$ = -27.16 ≤ 0 (cuadrantes de pendiente opuesta o algún cero). Coordenadas nulas: 0 de 4.

P	2.57	3.06
Q	-1.27	2.72

término	signo	valor	valor abs.
p_1q_2	+	6.99	6.99
p_2q_1	−	3.88	3.88

Figura 4.5 — Giro de 20°, rectángulos separados del centro |P|=4, |Q|=3, ∠PQ=65°, x ∥ P, θ=20°





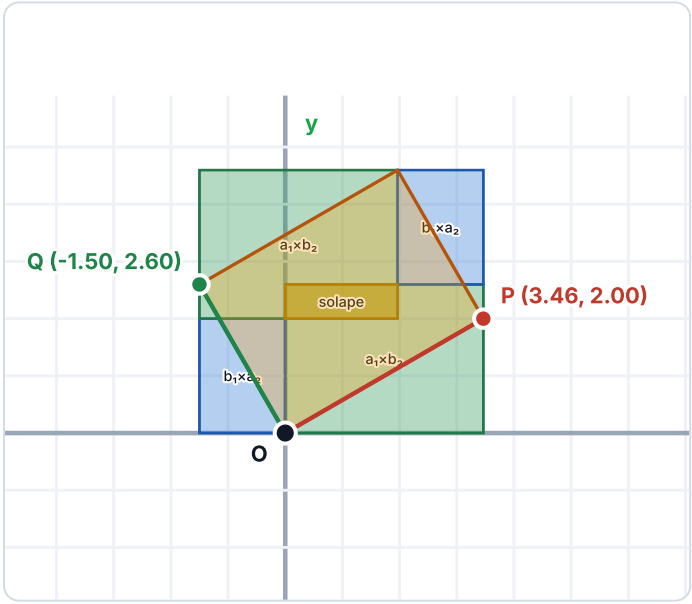
✘ **No: Σ > A.** Un término suma y el otro resta: **+p₁q₂** suma, **−p₂q₁** resta. En el determinante se compensan (A = 10.88); en Σ todo suma (Σ = 11.59). La diferencia es 2·mín(T₊, T₋) = **0.72**.

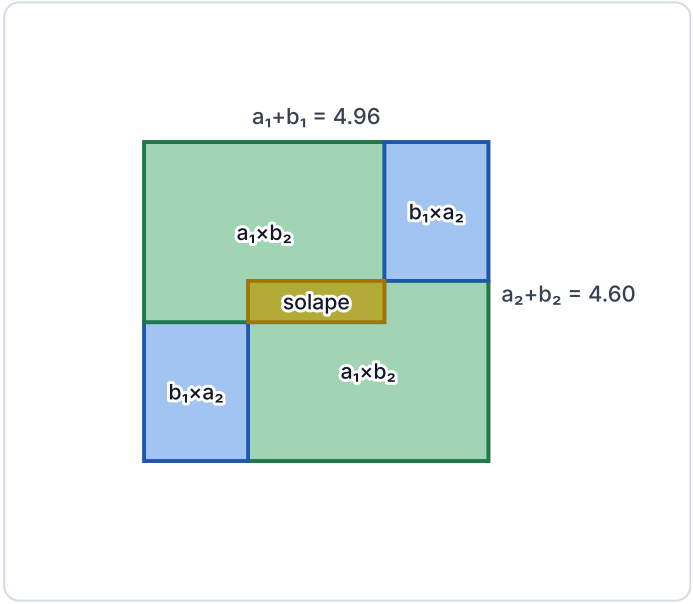
$p_1p_2q_1q_2$ = 4.02 > 0 (P y Q en cuadrantes de la misma pendiente). Coordenadas nulas: 0 de 4.

P	3.76	1.37
Q	0.26	2.99

término	signo	valor	valor abs.
p_1q_2	+	11.23	11.23
p_2q_1	−	-0.36	0.36

Figura 4.6 — Rectángulo (P ⊥ Q), giro de 30° |P|=4, |Q|=3, ∠PQ=90°, x ∥ P, θ=30°





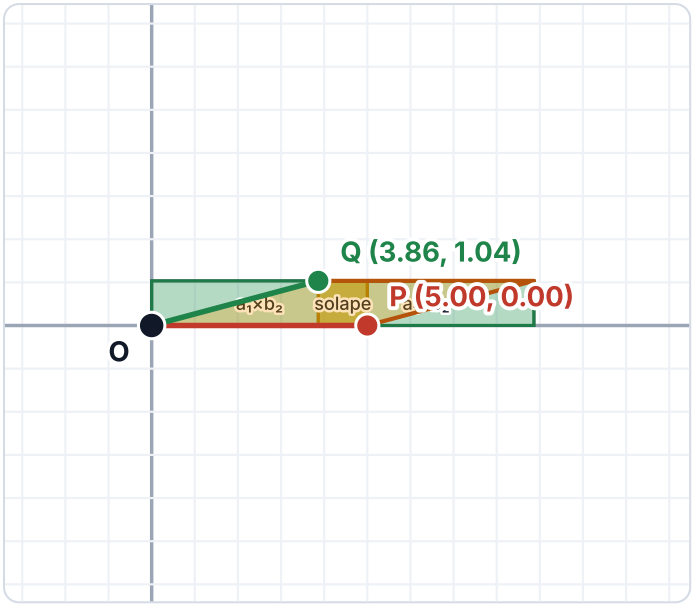
✔ **Sí: Σ = A = 12.00.** Los dos términos (**+p₁q₂**, **−p₂q₁**) aportan con el mismo signo (+).

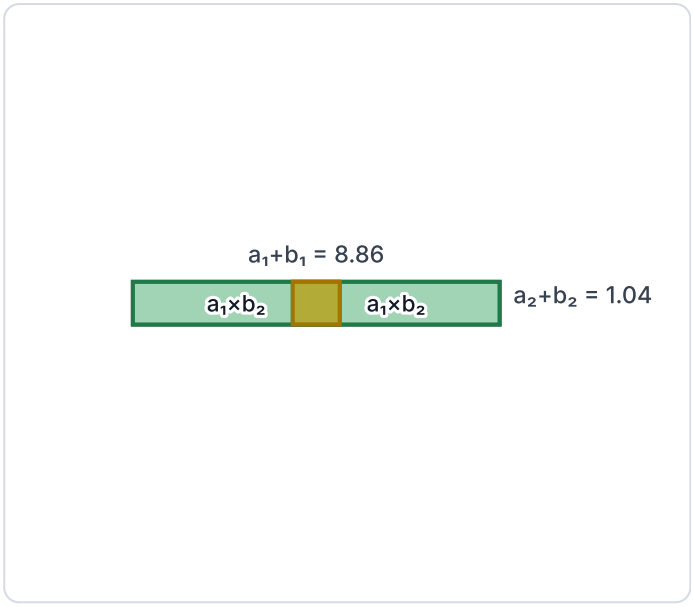
$p_1p_2q_1q_2$ = -27.00 ≤ 0 (cuadrantes de pendiente opuesta o algún cero). Coordenadas nulas: 0 de 4.

P	3.46	2.00
Q	-1.50	2.60

término	signo	valor	valor abs.
p_1q_2	+	9.00	9.00
p_2q_1	−	3.00	3.00

Figura 4.7 — Paralelogramo estrecho, sin giro |P|=5, |Q|=4, ∠PQ=15°, x ∥ P, θ=0°





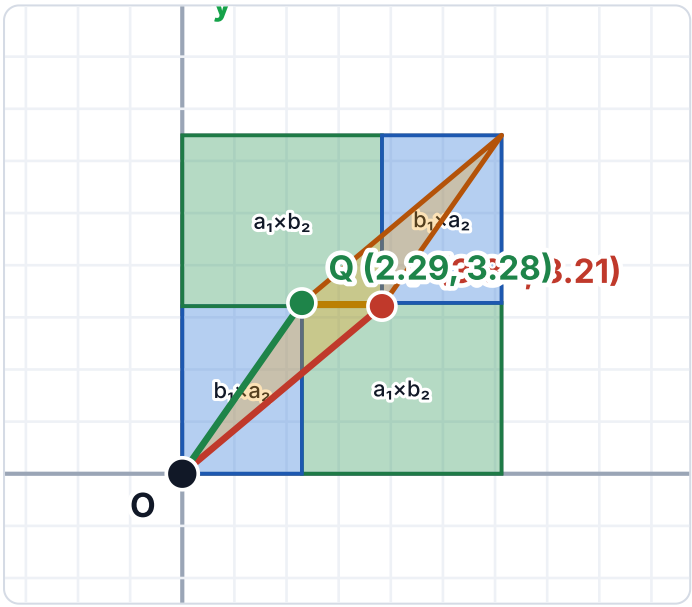
✔ **Sí: Σ = A = 5.18.** Solo hay un término no nulo, $+p_1q_2$, y no tiene con quién cancelarse.

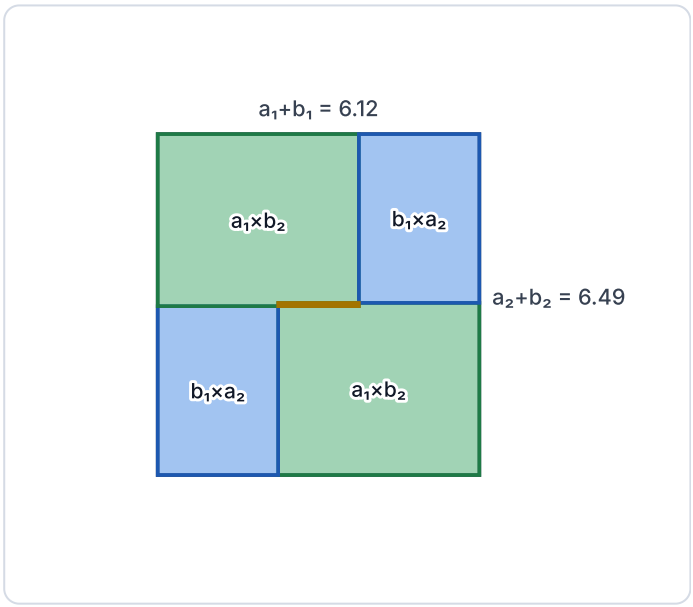
$p_1p_2q_1q_2$ = 0.00 ≤ 0 (cuadrantes de pendiente opuesta o algún cero). Coordenadas nulas: 1 de 4.

P	5.00	0.00
Q	3.86	1.04

término	signo	valor	valor abs.
p_1q_2	+	5.18	5.18
p_2q_1	−	0.00	0.00

Figura 4.8 — Paralelogramo estrecho, giro de 40° |P|=5, |Q|=4, ∠PQ=15°, x ∥ P, θ=40°





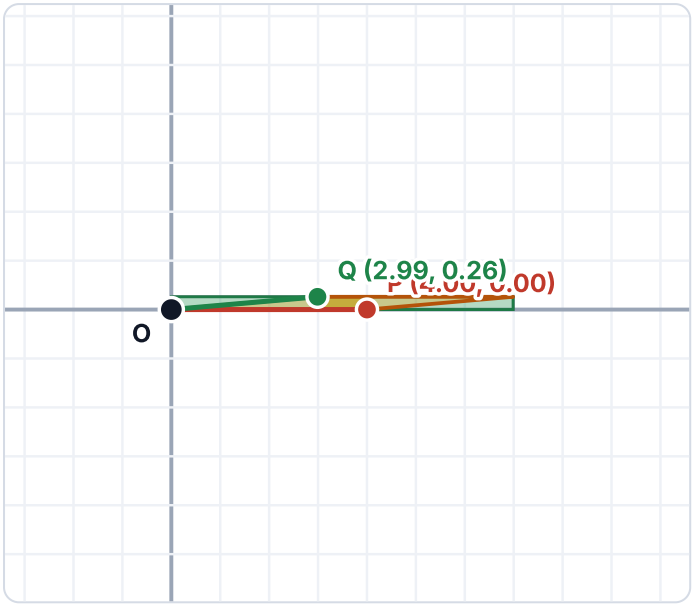
✘ **No: Σ > A.** Un término suma y el otro resta: $+p_1q_2$ suma, $-p_2q_1$ resta. En el determinante se compensan (A = 5.18); en Σ todo suma (Σ = 19.92). La diferencia es 2·mín(T_+, T_-) = **14.75**.

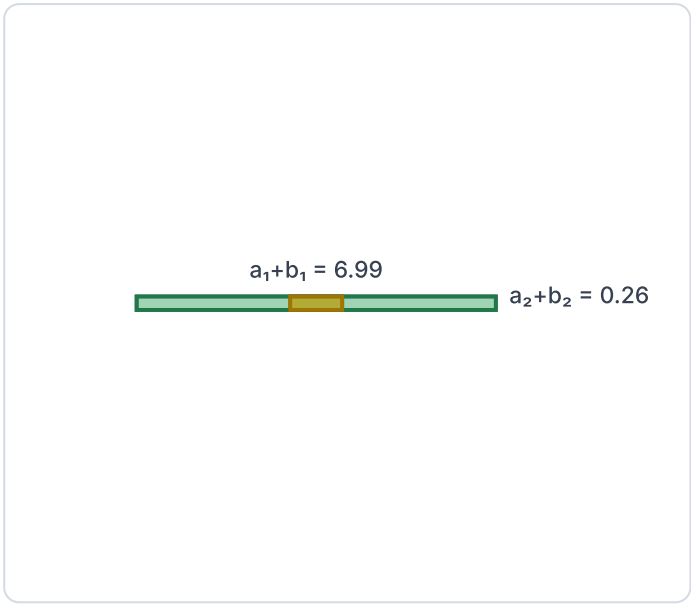
$p_1p_2q_1q_2$ = 92.54 > 0 (P y Q en cuadrantes de la misma pendiente). Coordenadas nulas: 0 de 4.

P	3.83	3.21
Q	2.29	3.28

término	signo	valor	valor abs.
p_1q_2	+	12.55	12.55
p_2q_1	−	-7.37	7.37

Figura 4.9 — Vectores casi paralelos, sin giro |P|=4, |Q|=3, ∠PQ=5°, x ∥ P, θ=0°





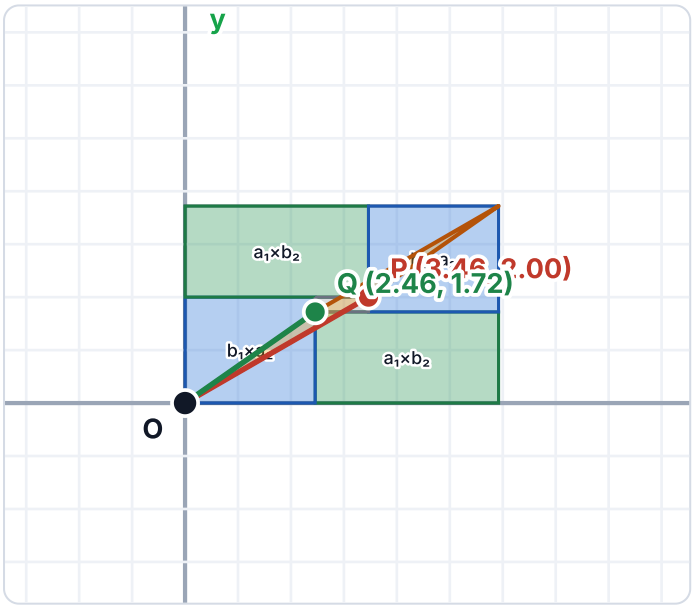
✔ **Sí: Σ = A = 1.05.** Solo hay un término no nulo, **+p₁q₂**, y no tiene con quién cancelarse.

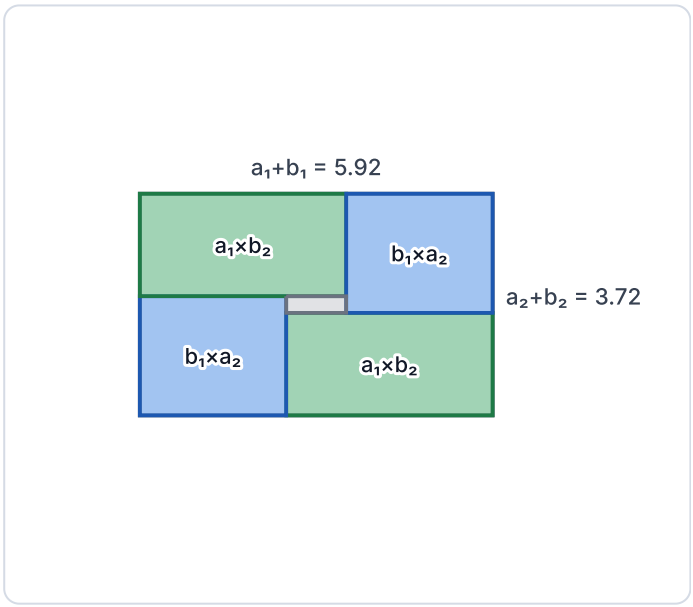
$p_1p_2q_1q_2$ = 0.00 ≤ 0 (cuadrantes de pendiente opuesta o algún cero). Coordenadas nulas: 1 de 4.

P	4.00	0.00
Q	2.99	0.26

término	signo	valor	valor abs.
p_1q_2	+	1.05	1.05
p_2q_1	−	0.00	0.00

Figura 4.10 — Vectores casi paralelos, giro de 30° |P|=4, |Q|=3, ∠PQ=5°, x ∥ P, θ=30°





✘ **No: Σ > A.** Un término suma y el otro resta: **+p₁q₂** suma, **−p₂q₁** resta. En el determinante se compensan (A = 1.05); en Σ todo suma (Σ = 10.88). La diferencia es 2·mín(T_+, T_-) = **9.83**.

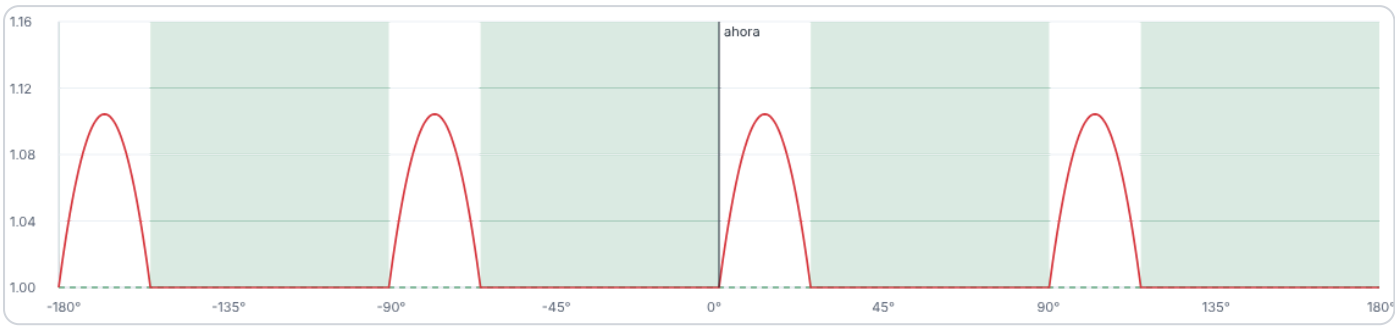
$p_1p_2q_1q_2$ = 29.30 > 0 (P y Q en cuadrantes de la misma pendiente). Coordenadas nulas: 0 de 4.

P	3.46	2.00
Q	2.46	1.72

término	signo	valor	valor abs.
p_1q_2	+	5.96	5.96
p_2q_1	−	-4.91	4.91

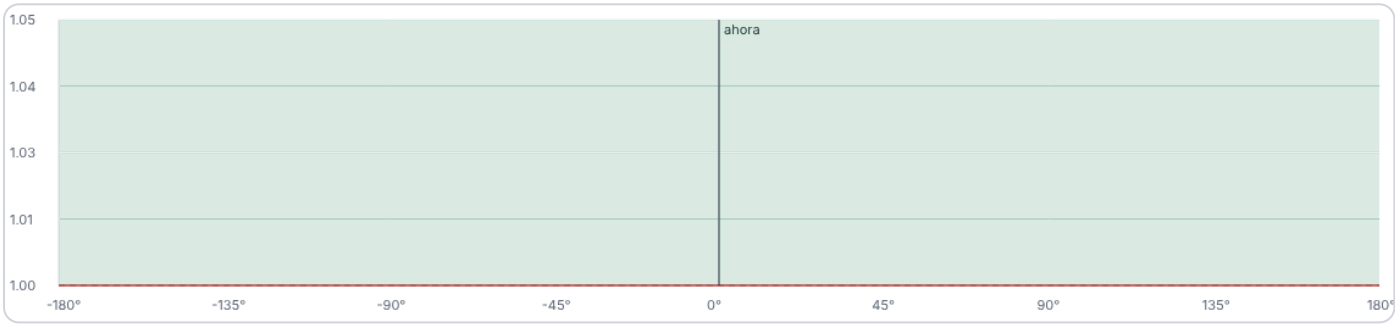
Σ/A al girar los ejes (figuras 4.11 a 4.13)

Figura 4.11 — Σ/A según el giro θ: Paralelogramo genérico (∠PQ = 65°)



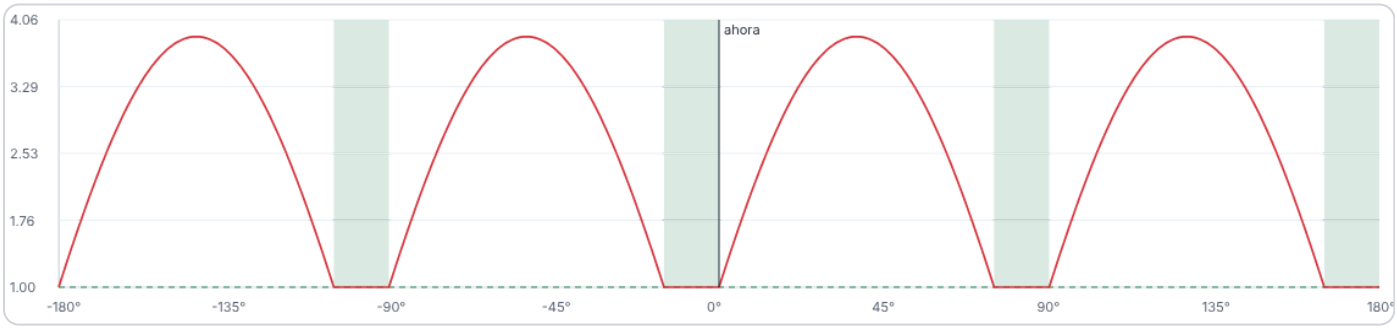
Proporción de giros con Σ = A (zonas verdes): **72.8 %**. Fórmula 2φ/π, con φ = 65°: **72.2 %**. Las zonas verdes son los giros con Σ = A.

Figura 4.12 — Σ/A según el giro θ: Rectángulo (P ⊥ Q)



Proporción de giros con Σ = A (zonas verdes): **100.0 %**. Fórmula 2φ/π, con φ = 90°: **100.0 %**. Las zonas verdes son los giros con Σ = A.

Figura 4.13 — Σ/A según el giro θ: Paralelogramo estrecho (∠PQ = 15°)



Proporción de giros con Σ = A (zonas verdes): **17.3 %**. Fórmula 2φ/π, con φ = 15°: **16.7 %**. Las zonas verdes son los giros con Σ = A.

Las zonas verdes son los giros en los que Σ = A. La gráfica se repite cada 90° (girar los ejes un cuarto de vuelta solo permuta las coordenadas y cambia algún signo), y en los ejes adaptados siempre hay igualdad.

5. Casos para probar

A. El marco adaptado

Con cualquiera de los dos marcos base y sin giro, $\Sigma = A$ para cualquier paralelogramo: es la construcción de la sección 2.

Ver las figuras 4.1, 4.2.

B. Un giro cualquiera

Con el paralelogramo genérico, un giro de $\theta = 20°$ saca a P y Q de los ejes y los pone en cuadrantes de la misma pendiente: aparece $\Sigma > A$.

Ver la figura 4.3.

C. Un giro que vuelve a dar igualdad

Si seguimos girando, hay otro intervalo de ángulos donde P y Q están en cuadrantes de pendiente opuesta y se recupera $\Sigma = A$ sin tener ninguna coordenada nula. Es lo que no pasa en 3D.

Ver la figura 4.4.

D. Rectángulo (P ⊥ Q)

Si P y Q son perpendiculares, $\Sigma = A$ para cualquier giro. La gráfica 4.12 lo confirma: Σ/A vale 1 para todo θ.

Ver las figuras 4.6, 4.12.

E. Paralelogramo muy estrecho

Con P y Q casi paralelos, los ejes buenos son pocos: la proporción $2\varphi/\pi$ es pequeña.

Ver las figuras 4.7, 4.8, 4.13.

F. Vectores paralelos (A = 0)

Si Q es múltiplo de P, $A = 0$, pero $\Sigma = 2|p_1q_2|$ solo se anula si P está sobre un eje.

Ver las figuras 4.9, 4.10.

6. Resumen

- A no depende de los ejes; $\Sigma = |p_1q_2| + |p_2q_1|$ sí. Siempre $\Sigma \geq A$, con $\Sigma - A = 2\cdot\text{mín}(T_+, T_-)$.
- **Sí existe** un sistema de ejes ortonormales con $\Sigma = A$ para cualquier paralelogramo: el eje x sobre P (o sobre Q).
- La igualdad se da exactamente cuando $p_1p_2q_1q_2 \leq 0$. La proporción de giros buenos es **$2\varphi/\pi$**, con φ el ángulo agudo entre OP y OQ: vale 1 para el rectángulo y tiende a 0 cuando P y Q se alinean.
- En 2D la igualdad puede darse con las cuatro coordenadas distintas de 0; en 3D con las nueve distintas de 0 es imposible.
- Cuando se da la igualdad, $2A = (a_1+b_1)(a_2+b_2) - (-a_1+b_1)(-a_2+b_2) = 2(a_1b_2 + a_2b_1)$: el contenedor se rellena con 4 rectángulos y un hueco.

Cuatro veces el volumen de un paralelepípedo, como diferencia de ortoedros

Una identidad entre productos de tres factores relaciona un ortoedro grande, tres ortoedros que se le restan y una suma de seis productos. Veremos cuándo esa suma es exactamente el determinante, y por tanto cuatro veces el volumen del paralelepípedo, y cuándo no.

1. La identidad

$$\prod_{i=1}^{3}(a_i+b_i+c_i)-\prod_{i=1}^{3}(-a_i+b_i+c_i)-\prod_{i=1}^{3}(a_i-b_i+c_i)-\prod_{i=1}^{3}(a_i+b_i-c_i)=4\sum_{\sigma\in S_3}a_{\sigma(1)}b_{\sigma(2)}c_{\sigma(3)}$$

Es una identidad algebraica: se comprueba desarrollando los productos y vale para números reales cualesquiera $a_i,\ b_i,\ c_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

Cómo se lee el segundo miembro

Colocamos los nueve números en una matriz de tres filas, una por cada letra. Cada sumando de la suma toma **un elemento de cada fila y uno de cada columna**: la permutación $\sigma \in S_3$ decide la columna, de modo que se toma $a_{\sigma(1)}$ de la fila a, $b_{\sigma(2)}$ de la fila b y $c_{\sigma(3)}$ de la fila c.

$$\begin{pmatrix} a & a_1 & a_2 & a_3 \\ b & b_1 & b_2 & b_3 \\ c & c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Como S_3 tiene 3! = 6 permutaciones, la suma tiene seis sumandos:

$$\Sigma = a_1b_2c_3 + a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 + a_3b_2c_1$$

Es el desarrollo de un determinante en el que se han quitado todos los signos ±; se llama la *permanente* de la matriz.

2. Los valores absolutos: P, Q, R y el paralelepípedo

Partimos de tres vectores **P = (p_1, p_2, p_3)**, **Q = (q_1, q_2, q_3)** y **R = (r_1, r_2, r_3)**, es decir, OP, OQ y OR desde el origen O, y tomamos como números de la identidad sus valores absolutos:

$$a_i = |p_i|, \quad b_i = |q_i|, \quad c_i = |r_i|$$

O sea, la matriz de la identidad es la de los valores absolutos de la matriz que tiene por filas P, Q y R. Esto da cuatro lecturas de la identidad:

- **Segundo miembro.** $4\Sigma = 4\cdot\Sigma_\sigma |p_{\sigma(1)}\, q_{\sigma(2)}\, r_{\sigma(3)}|$: son los seis términos del determinante de P, Q, R, pero tomados en valor absoluto y sumados todos.
- **Ortoedro grande.** $\Pi(a_i+b_i+c_i)$ es el volumen del ortoedro que contiene al paralelepípedo, con las caras paralelas a los planos coordenados. En el eje i las coordenadas de los vértices van desde la suma de las partes negativas de p_i, q_i, r_i hasta la suma de las positivas, así que su arista mide $|p_i|+|q_i|+|r_i|$, sean cuales sean los signos.
- **Los tres ortoedros que se restan** tienen aristas $(-a_i+b_i+c_i)$, $(a_i-b_i+c_i)$ y $(a_i+b_i-c_i)$. Si alguna arista sale negativa, el volumen cuenta con su signo.
- **Volumen del paralelepípedo.** $V = |\det(P,Q,R)|$, con $\det(P,Q,R) = \Sigma_\sigma\, \varepsilon_\sigma\, p_{\sigma(1)}\, q_{\sigma(2)}\, r_{\sigma(3)}$, donde $\varepsilon_\sigma = \pm 1$ es la signatura de la permutación.

> Como el valor absoluto de una suma nunca supera la suma de los valores absolutos, siempre se cumple **$4V \le \Pi(a+b+c) - \Pi(-a+b+c) - \Pi(a-b+c) - \Pi(a+b-c) = 4\Sigma$**. Lo que nos interesa es **cuándo hay igualdad**.

---

3. Cuándo la suma Σ es igual al determinante

Los seis términos del determinante son los seis sumandos de Σ con su signo ε_σ y con los signos de las coordenadas de P, Q, R:

$\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3))$	(1,2,3)	(2,3,1)	(3,1,2)	(1,3,2)	(2,1,3)	(3,2,1)
signatura ε_σ	+	+	+	−	−	−
término $p_{\sigma(1)}\, q_{\sigma(2)}\, r_{\sigma(3)}$	$p_1q_2r_3$	$p_2q_3r_1$	$p_3q_1r_2$	$p_1q_3r_2$	$p_2q_1r_3$	$p_3q_2r_1$

Llamemos T_+ a la suma de los términos $\varepsilon_\sigma\cdot p\cdot q\cdot r$ que son positivos y T_- a la suma de los valores absolutos de los que son negativos. Entonces

$$\det(P,Q,R) = T_+ - T_-, \quad \Sigma = T_+ + T_-, \quad \Sigma - |\det| = 2\cdot\mathrm{mín}(T_+, T_-)$$

> **Σ = |det| (y por tanto 4V = lado izquierdo) si y solo si ningún término del determinante se cancela con otro**, es decir, si todos los términos no nulos $\varepsilon_\sigma\cdot p_{\sigma(1)}q_{\sigma(2)}r_{\sigma(3)}$ tienen el mismo signo. Cuando no es así, $4\Sigma - 4V = 8\cdot\mathrm{mín}(T_+, T_-) > 0$.

El caso que vamos a construir en 3D

Tomamos $\mathbf{p_i \geq 0}$; $\mathbf{q_1 \leq 0}$, $\mathbf{q_2, q_3 \geq 0}$; $\mathbf{r_1 = 0}$, $\mathbf{r_2 \leq 0}$, $\mathbf{r_3 \geq 0}$. Como $r_1 = 0$, los dos términos que contienen r_1 valen 0, y los otros cuatro cumplen:

término	ε_σ	signos de los factores	signo de p·q·r	ε_σ·p·q·r
$p_1q_2r_3$	+	(≥0)(≥0)(≥0)	≥ 0	**≥ 0**
$p_2q_1r_3$	−	(≥0)(≤0)(≥0)	≤ 0	**≥ 0**
$p_1q_3r_2$	−	(≥0)(≥0)(≤0)	≤ 0	**≥ 0**
$p_3q_1r_2$	+	(≥0)(≤0)(≤0)	≥ 0	**≥ 0**
$p_2q_3r_1$ y $p_3q_2r_1$	+ y −	contienen $r_1 = 0$	0	0

Los cuatro términos no nulos aportan con signo positivo, nada se cancela:

$$\det(P,Q,R) = p_1q_2r_3 - p_2q_1r_3 - p_1q_3r_2 + p_3q_1r_2 = |p_1q_2r_3| + |p_2q_1r_3| + |p_1q_3r_2| + |p_3q_1r_2| = \Sigma$$

Por tanto V = det(P,Q,R) = Σ, y la identidad dice exactamente que **4·V = Π(a+b+c) − Π(−a+b+c) − Π(a−b+c) − Π(a+b−c)**. Si además $r_2 = 0$, quedan solo dos términos, $p_1q_2r_3$ y $p_2q_1r_3$.

Observación importante. Con las nueve coordenadas distintas de 0 la igualdad Σ = |det| es **imposible**; basta una sola coordenada nula (aquí $r_1 = 0$) para que pueda cumplirse.

▶ ¿Por qué?

---

4. Primer 3D: el caso en que coincide

Aquí se cumplen las condiciones de signo de la sección 3 (r_1 queda fijo en 0). Las figuras 4.1 a 4.14 muestran distintas vistas. Qué mirar:

- El paralelepípedo OP, OQ, OR (naranja) dentro de su ortoedro contenedor (aristas grises), que mide $a_i+b_i+c_i$.
- El contenedor está relleno con los ortoedros de aristas $a_{\sigma(1)} \times b_{\sigma(2)} \times c_{\sigma(3)}$ de las cuatro permutaciones no nulas, cada uno repetido 4 veces (16 ortoedros, volumen total 4Σ). Los verdes y azules forman dos losas, la inferior y la superior, y los rojos y rosas forman dos capas, la delantera y la trasera. Cada capa deja un hueco, y queda un bloque central.
- A la derecha están las tres piezas que se restan. Los cuatro huecos suman Π(−a+b+c) + Π(a−b+c) y el bloque central es Π(a+b−c).
- Con $r_2 = 0$ solo quedan los ortoedros verdes y azules (8 ortoedros). Las figuras 4.7 a 4.9 abren las piezas para verlas por dentro.



Figura 4.1. P=(1, 1.5, 1), Q=(−2.5, 3, 2.5), R=(0, −1.5, 2). Arriba, el paralelepípedo (naranja) dentro de su ortoedro contenedor, de dimensiones 3.50×6.00×5.50 (volumen Π(a+b+c) = 115.50). Debajo, las tres piezas que se restan, de volúmenes 15.75, 0.00 y 15.75. Así 115.50 − 15.75 − 0.00 − 15.75 = 84.00 = 4Σ = 4·21.00 = 4V.

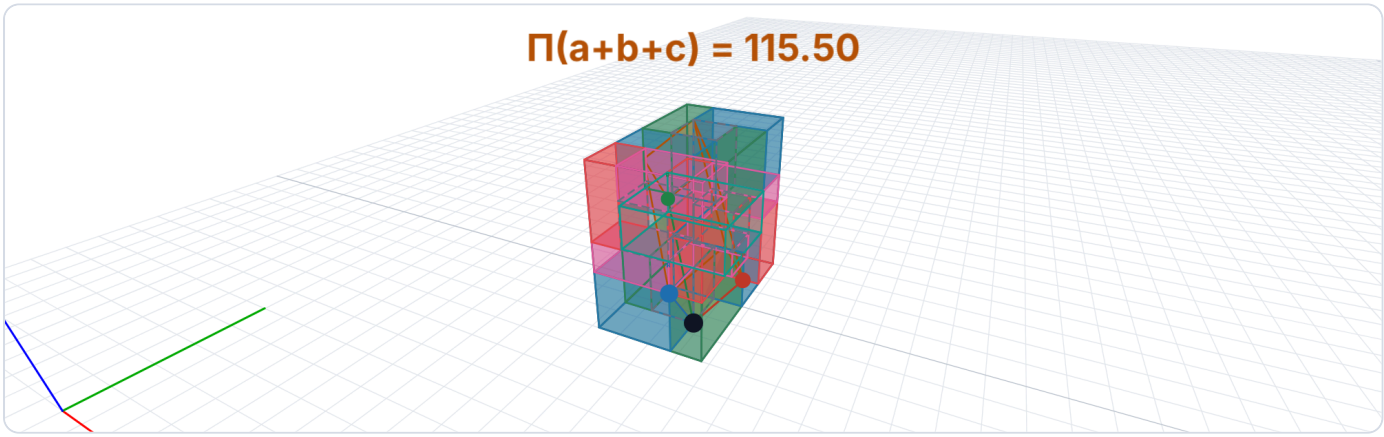


Figura 4.2. Vista delante-derecha. El contenedor relleno con los 16 ortoedros de aristas $a_{\sigma(1)}\times b_{\sigma(2)}\times c_{\sigma(3)}$ (verdes, azules, rojos y rosas; volumen total 4Σ = 84.00), más cuatro huecos (gris, discontinuo) y el bloque central (turquesa, de volumen Π(a+b−c) = 15.75).

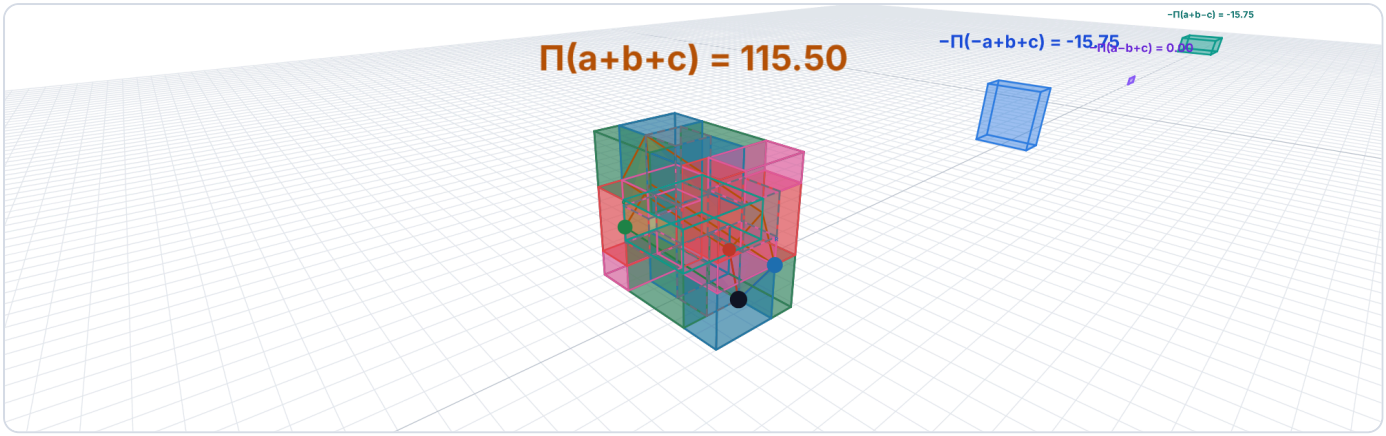


Figura 4.3. Vista delante-izquierda. Giro de la vista: la cara izquierda del contenedor. Se ven las dos capas (rojos y rosas) y uno de los huecos de cada capa.

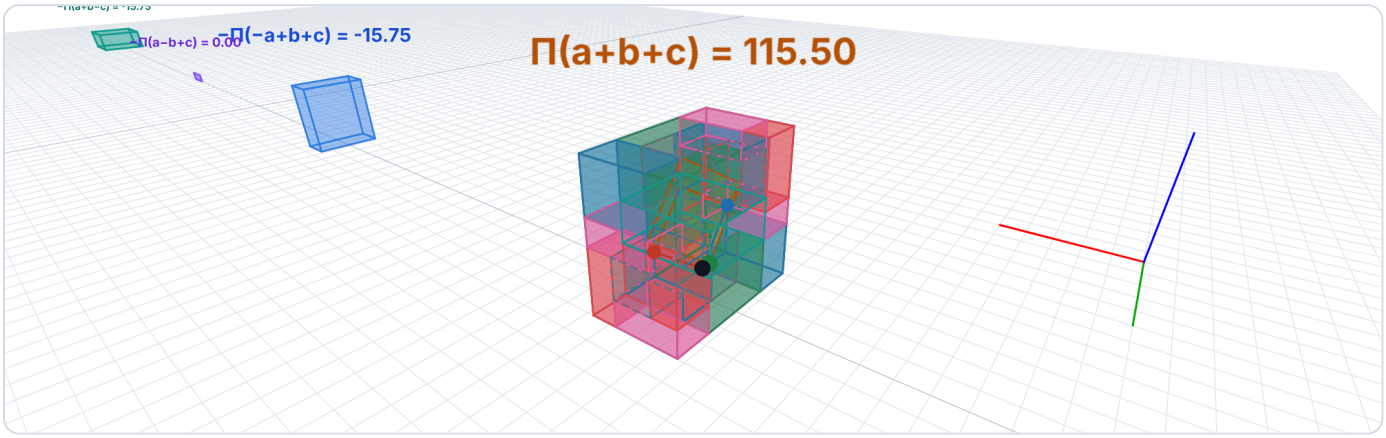


Figura 4.4. Vista detrás-izquierda. Vista por detrás: la capa trasera y su hueco, y las losas verdes y azules vistas desde el otro lado.

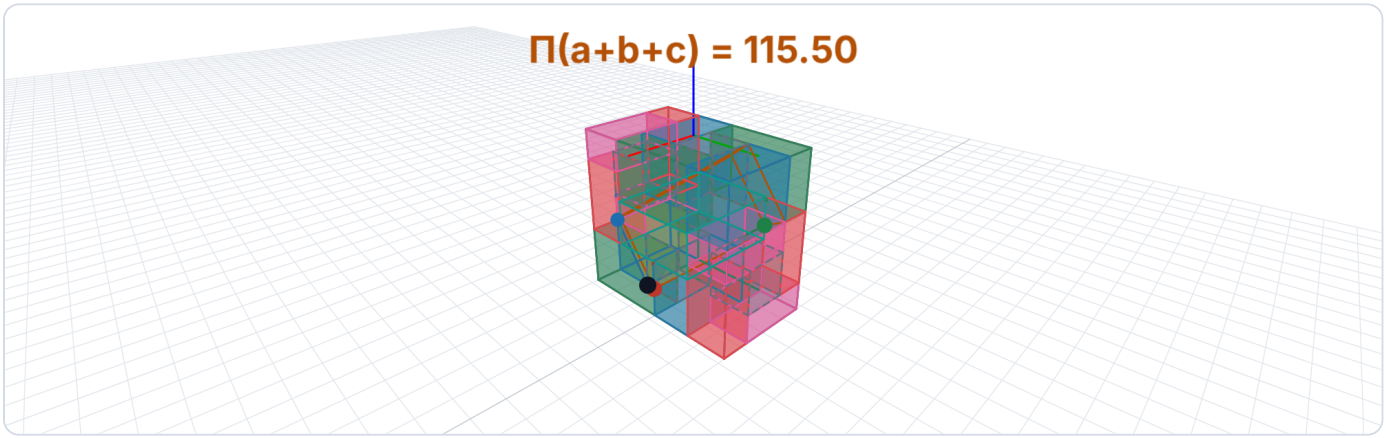


Figura 4.5. Vista detrás-derecha. Otro giro por detrás: los ortoedros se reparten en dos losas (abajo y arriba) y dos capas (delante y detrás), y entre ellas queda el bloque central.

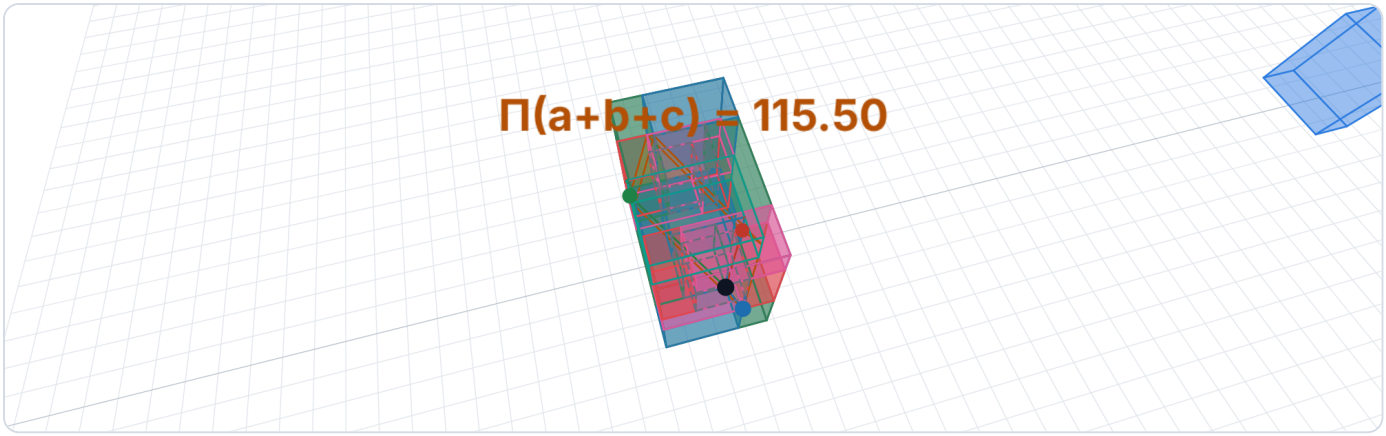


Figura 4.6. Vista desde arriba: la losa superior (verdes y azules) deja ver el hueco de la losa en forma de molinete y, a través de la transparencia, el resto de piezas.

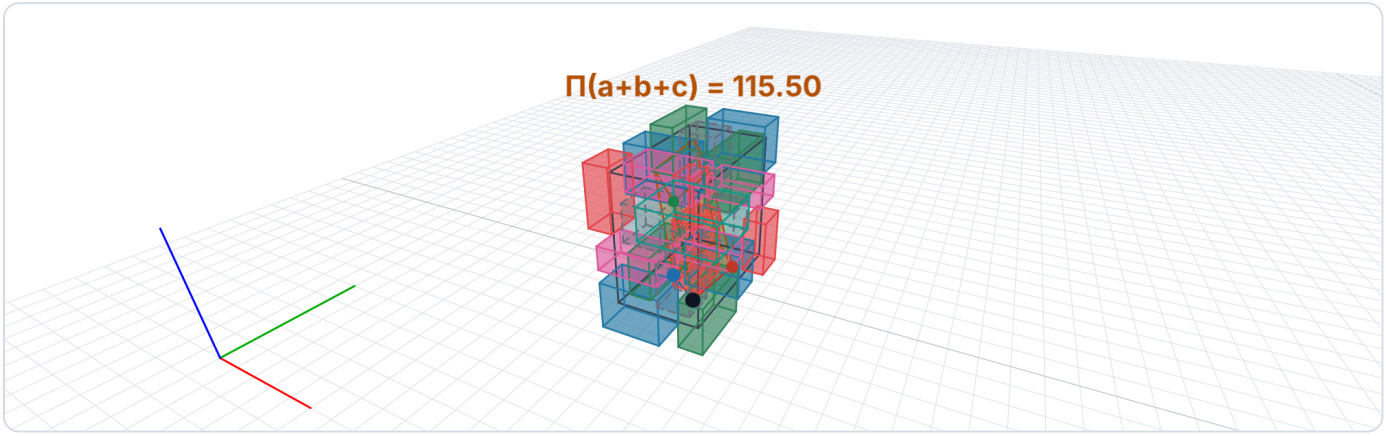


Figura 4.7. Los mismos ortoedros separados del centro, para ver cada pieza por separado: dos losas de altura c_3 (abajo y arriba) y dos capas de grosor c_2 (delante y detrás). Vista delante-derecha.

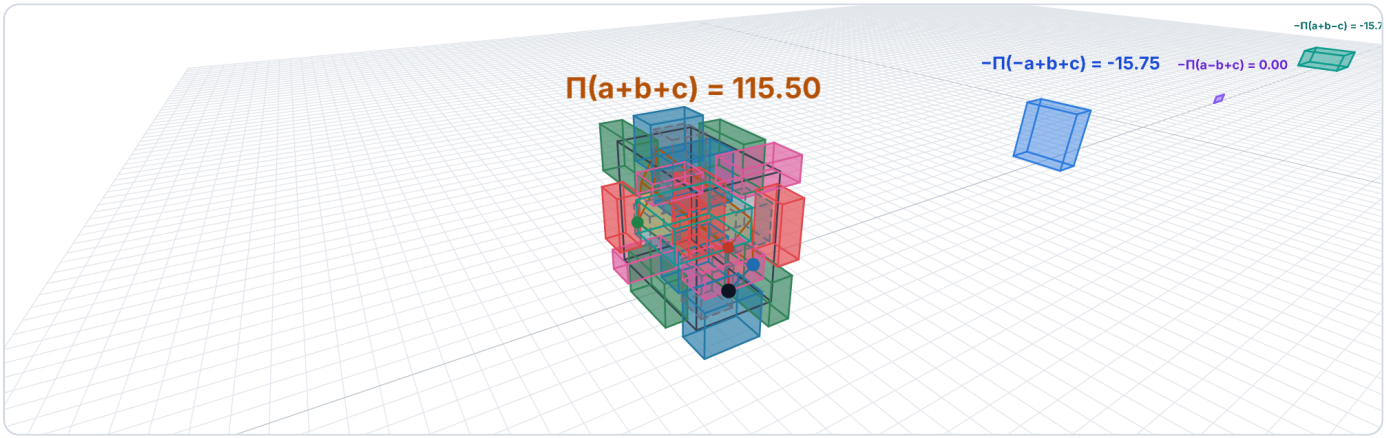


Figura 4.8. Las piezas separadas, vistas desde delante-izquierda.

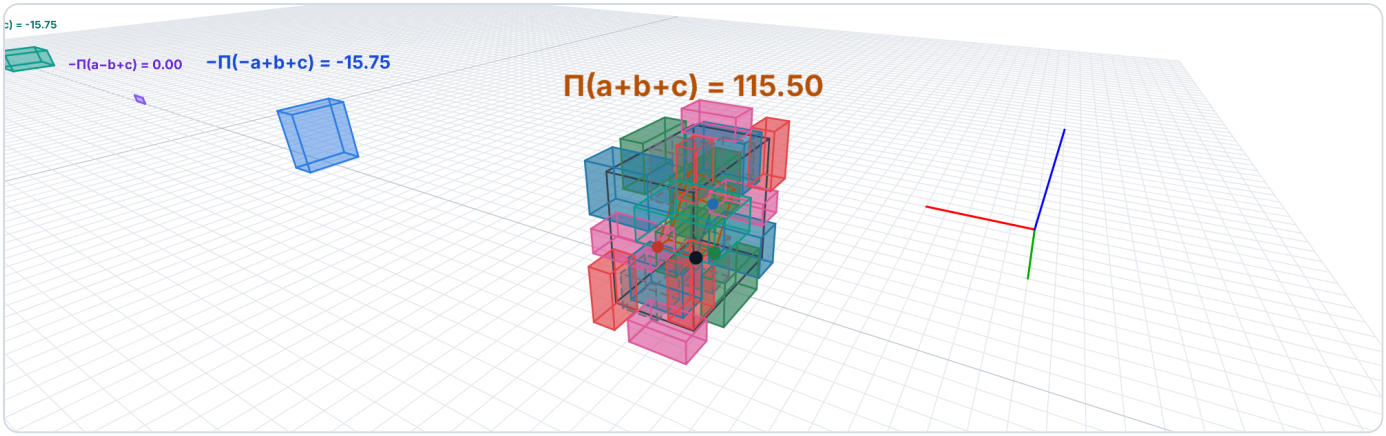


Figura 4.9. Las piezas separadas, vistas por detrás.

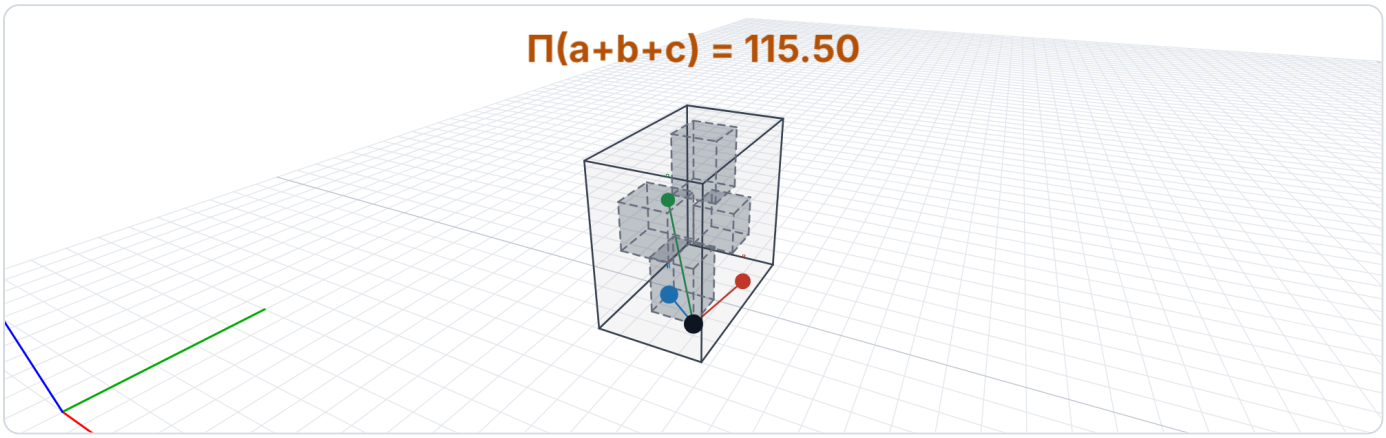


Figura 4.10. El contenedor con *solo* los cuatro huecos (sin los 16 ortoedros, sin el bloque central y sin el paralelepípedo). Dos son huecos de las losas, de dimensiones $|a_1-b_1|\times|a_2-b_2|\times c_3$ = 1.50×1.50×2.00, y dos de las capas, de $|a_1-b_1|\times c_2\times|a_3-b_3|$ = 1.50×1.50×1.50. Los cuatro juntos suman Π(−a+b+c) + Π(a−b+c) = 15.75 + 0.00 = 15.75.

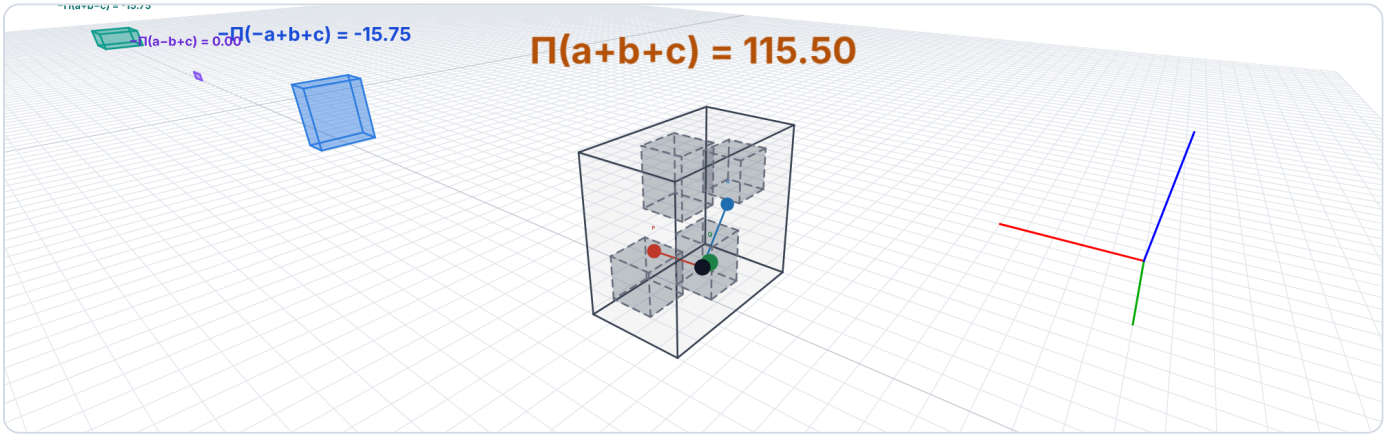


Figura 4.11. Los cuatro huecos vistos por detrás.

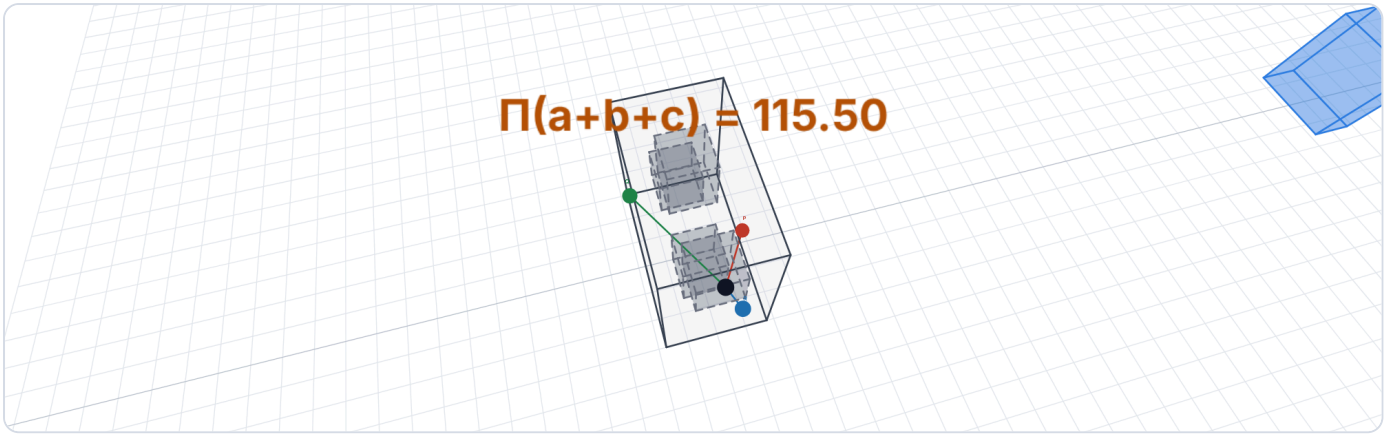


Figura 4.12. Los cuatro huecos vistos desde arriba: se aprecia su posición, uno en cada losa y uno en cada capa.

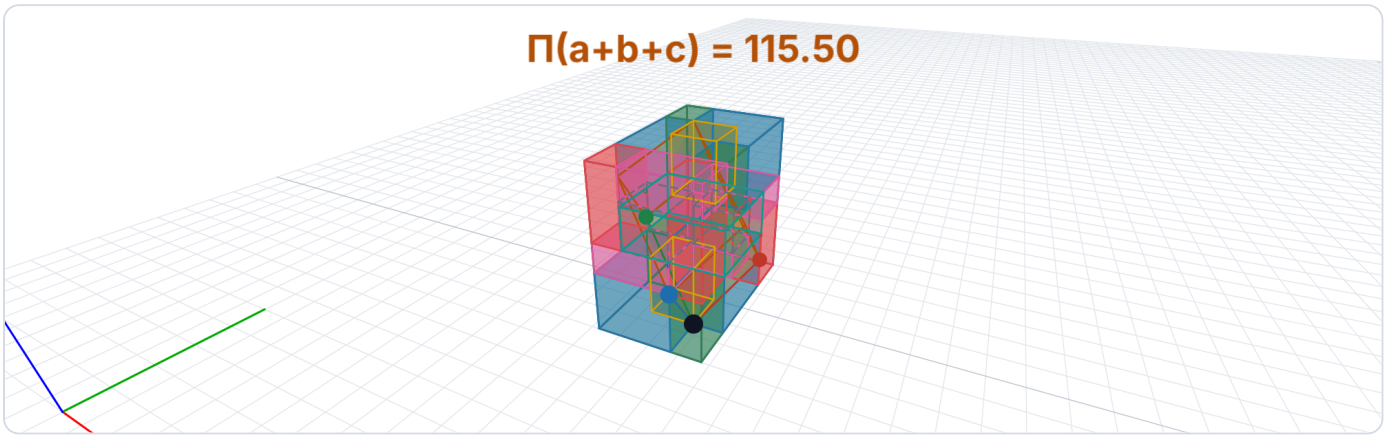


Figura 4.13. P=(1, 3, 1), Q=(−2.5, 1.5, 2.5), R=(0, −1.5, 2). Ahora $(a_1-b_1)(a_2-b_2) = -1.50 \cdot 1.50 = -2.25 < 0$: los ortoedros se solapan (zonas amarillas) en lugar de dejar hueco, y ese hueco cuenta con signo negativo. La identidad sigue valiendo: el lado izquierdo es 102.00 = 4Σ.

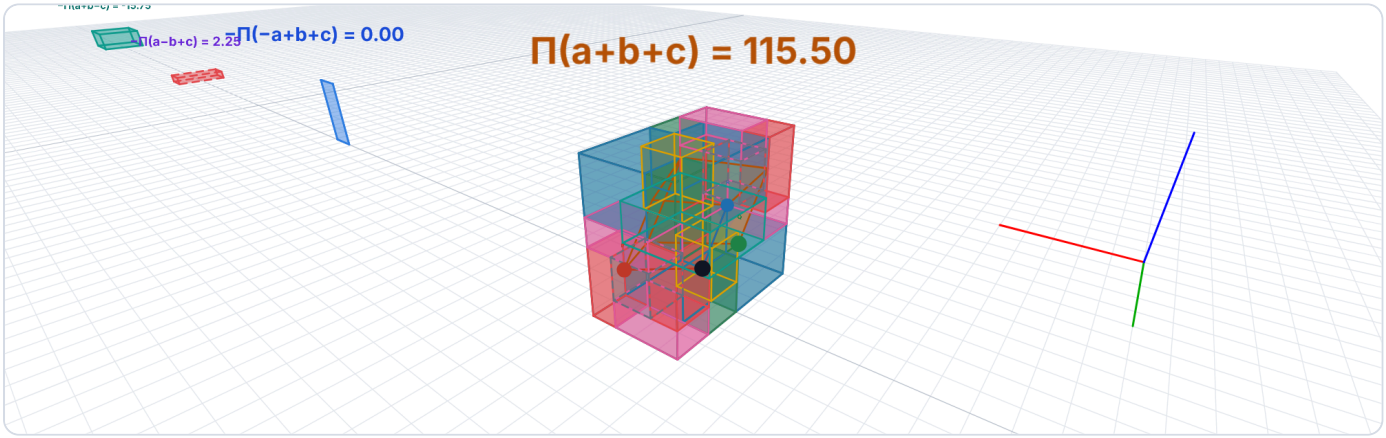


Figura 4.14. El caso con solape, visto por detrás.

---

5. Cuándo NO sale la suma igual al determinante

La identidad del apartado 1 es cierta siempre: el lado izquierdo es siempre 4Σ. Lo que puede fallar es que Σ sea igual a |det|, y por tanto que ese lado izquierdo sea 4V. Falla en cuanto dos términos no nulos del determinante tienen signos contrarios, porque entonces se cancelan en el determinante pero no en Σ, que toma valores absolutos. La diferencia es exactamente **$4\Sigma - 4V = 8 \cdot \min(T_+, T_-)$**.

Casos típicos (cada tarjeta indica la figura de la sección 6 que lo ilustra):

A. Aparece $r_1 \neq 0$

Con los signos de la sección 3, $r_1 \neq 0$ añade los términos $+p_2q_3r_1$ y $-p_3q_2r_1$. Si $r_1 > 0$, el segundo es ≤ 0 y resta; si $r_1 < 0$, el que resta es el primero. La igualdad se mantiene solo si ese término es nulo ($p_3 = 0$ o $q_2 = 0$ para $r_1 > 0$; $p_2 = 0$ o $q_3 = 0$ para $r_1 < 0$), salvo el caso degenerado en que todos los demás términos también se anulan.

Ver las figuras 6.2, 6.3.

B. Se cambia un signo

Cada coordenada aparece en exactamente 2 de los 6 términos, así que cambiar su signo invierte el signo de esos dos términos. Si uno de ellos es nulo (por ejemplo por contener $r_1 = 0$), solo cambia uno, pero ya basta para que dejen de tener todos el mismo signo.

Ver la figura 6.4.

C. Todas las coordenadas $\neq 0$

Como vimos en la sección 3, nunca coincide. Ejemplo: P=(2,1,1), Q=(1,2,1), R=(1,1,2). Su volumen es V = 4, pero $\Sigma = 16$, de modo que el lado izquierdo vale 64 y 4V vale 16.

Ver la figura 6.5.

D. Volumen cero y $\Sigma \neq 0$

Si P y Q son paralelos, el paralelepípedo es plano (V = 0) pero los términos $p_1q_2r_3$ y $-p_2q_1r_3$ valen +1 y −1: se cancelan en el determinante, mientras que $\Sigma = 2$.

Ver la figura 6.6.

E. Y un caso que siempre coincide

Si P, Q y R están sobre los ejes coordenados solo sobrevive un término, y no hay con quién cancelarse: $\Sigma = |\det|$ siempre.

Ver las figuras 6.7, 6.1.

6. Segundo 3D: signos libres y $r_1 \neq 0$

Ahora las nueve coordenadas, **incluida r_1**, pueden tener cualquier signo. Cada figura muestra un ejemplo; observa en cada una:

- El paralelepípedo y su ortoedro contenedor, cuyas aristas son siempre $a_i+b_i+c_i$, y las tres piezas que se restan ($\Pi(-a+b+c)$, $\Pi(a-b+c)$, $\Pi(a+b-c)$).
- En primer plano, los seis ortoedros de aristas $a_{\sigma(1)} \times b_{\sigma(2)} \times c_{\sigma(3)}$. Cada ortoedro es **verde** si su término $\varepsilon_\sigma \cdot p \cdot q \cdot r$ es positivo (suma en el determinante), **rojo** si es negativo (resta) y **gris** si vale 0. Se tiene det = (verdes) − (rojos), mientras que Σ = (verdes) + (rojos).
- Debajo de cada figura se dice si sale $\Sigma = |\det|$ y por qué, con el exceso $8 \cdot \min(T_+, T_-)$ cuando no.

suma · resta · nulo · paralelepípedo · $\Pi(-a+b+c)$ · $\Pi(a-b+c)$ · $\Pi(a+b-c)$

Figura 6.1 — Caso del 1.er 3D P=(1, 1.5, 1), Q=(−2.5, 3, 2.5), R=(0, −1.5, 2)

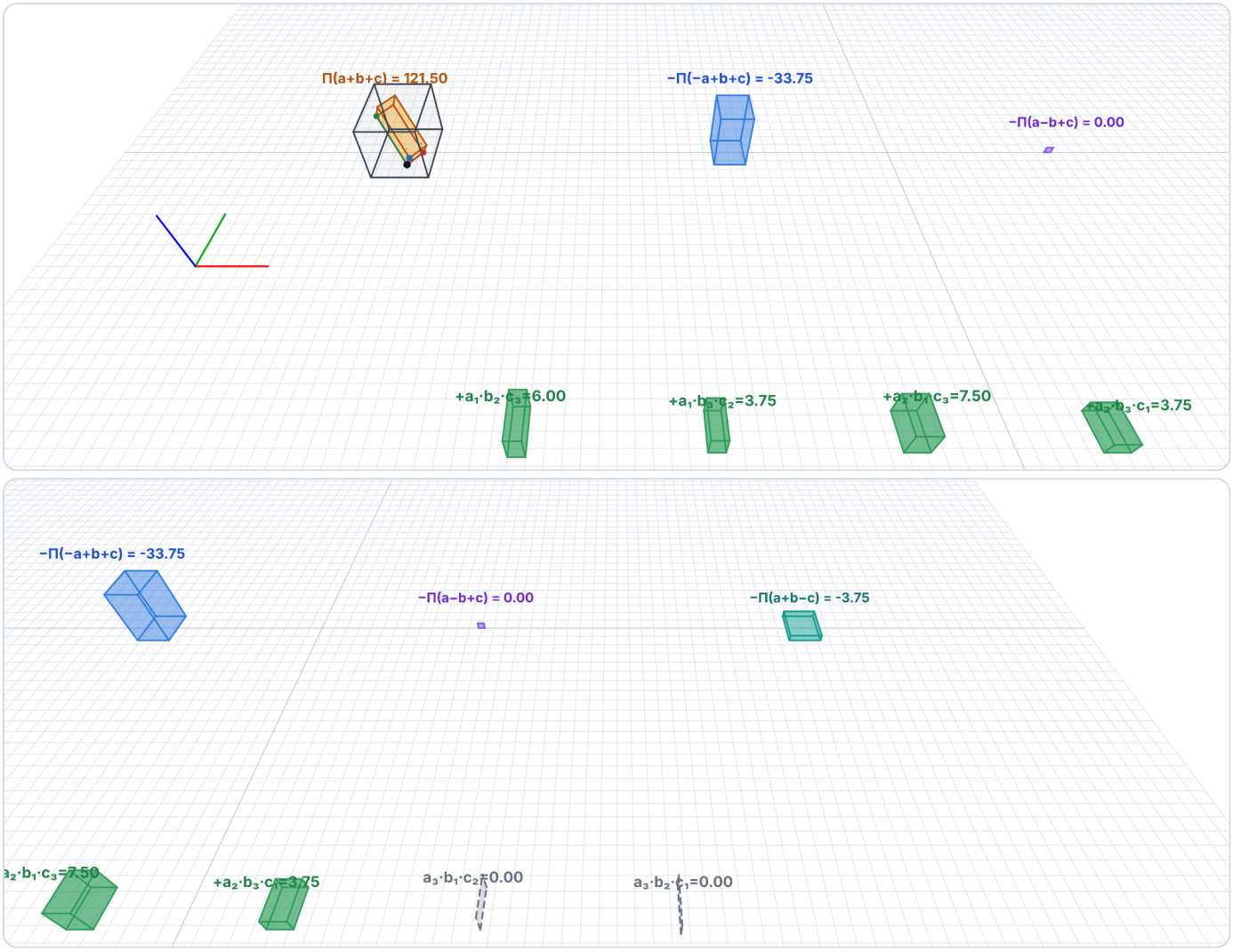


✔ **Sí: Σ = |det| = 21.00.** Los 4 términos no nulos (**$+p_1q_2r_3$, $-p_1q_3r_2$, $-p_2q_1r_3$, $+p_3q_1r_2$**) aportan todos con el mismo signo (+), así que en el determinante no se cancela nada y 4V = lado izquierdo = 84.00.

4V = 84.00 exceso = 0.00 total 4Σ = 84.00

σ	ε	término	p·q·r	ε·p·q·r	|p·q·r|
(1,2,3)	+	$p_1q_2r_3$	6.00	6.00	6.00
(1,3,2)	−	$p_1q_3r_2$	-3.75	3.75	3.75
(2,1,3)	−	$p_2q_1r_3$	-7.50	7.50	7.50
(2,3,1)	+	$p_2q_3r_1$	0.00	0.00	0.00
(3,1,2)	+	$p_3q_1r_2$	3.75	3.75	3.75
(3,2,1)	−	$p_3q_2r_1$	0.00	0.00	0.00

Figura 6.2 — $r_1 \neq 0$ con $p_3 = 0$ P=(1, 1.5, 0), Q=(−2.5, 3, 2.5), R=(1, −1.5, 2)



✔ **Sí: Σ = |det| = 21.00.** Los 4 términos no nulos (**$+p_1q_2r_3$, $-p_1q_3r_2$, $-p_2q_1r_3$, $+p_2q_3r_1$**) aportan todos con el mismo signo (+), así que en el determinante no se cancela nada y 4V = lado izquierdo = 84.00.

$r_1 \neq 0$: entran en juego los términos que contienen a r_1, $p_2q_3r_1$ y $p_3q_2r_1$.

4V = 84.00 exceso = 0.00 total 4Σ = 84.00

σ	ε	término	p·q·r	ε·p·q·r	|p·q·r|
(1,2,3)	+	$p_1q_2r_3$	6.00	6.00	6.00
(1,3,2)	−	$p_1q_3r_2$	-3.75	3.75	3.75
(2,1,3)	−	$p_2q_1r_3$	-7.50	7.50	7.50
(2,3,1)	+	$p_2q_3r_1$	3.75	3.75	3.75
(3,1,2)	+	$p_3q_1r_2$	0.00	0.00	0.00
(3,2,1)	−	$p_3q_2r_1$	0.00	0.00	0.00

Figura 6.3 — $r_1 \neq 0$ P=(1, 1.5, 1), Q=(−2.5, 3, 2.5), R=(1, −1.5, 2)



✘ **No: Σ > |det|.** Suman: **$+p_1q_2r_3$**, **$-p_1q_3r_2$**, **$-p_2q_1r_3$**, **$+p_2q_3r_1$**, **$+p_3q_1r_2$** ($T_+ = 24.75$). Restan: **$-p_3q_2r_1$** ($T_- = 3.00$).

En el determinante se compensan parcialmente (det = $T_+ - T_- = 21.75$, V = 21.75), pero en Σ todo suma (Σ = $T_+ + T_- = 27.75$). El lado izquierdo sigue siendo 4Σ = 111.00, y supera a 4V en 8·mín(T_+, T_-) = **24.00**.

Las nueve coordenadas son distintas de 0: en ese caso la igualdad es imposible (sección 3).

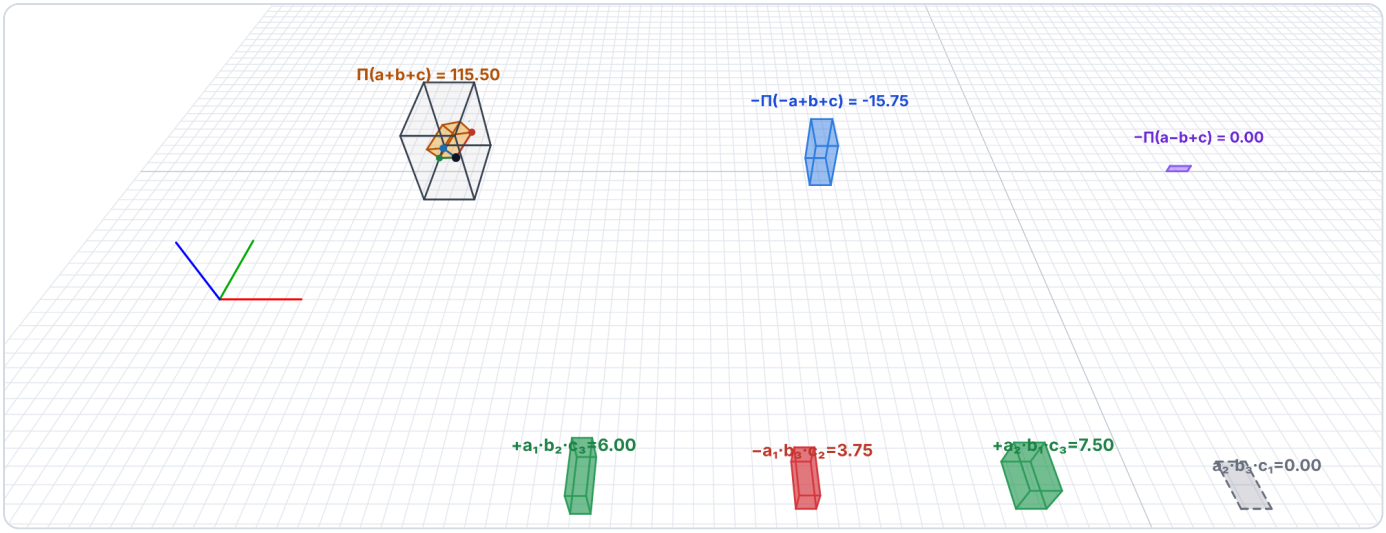
$r_1 \neq 0$: entran en juego los términos que contienen a r_1, $p_2q_3r_1$ y $p_3q_2r_1$.

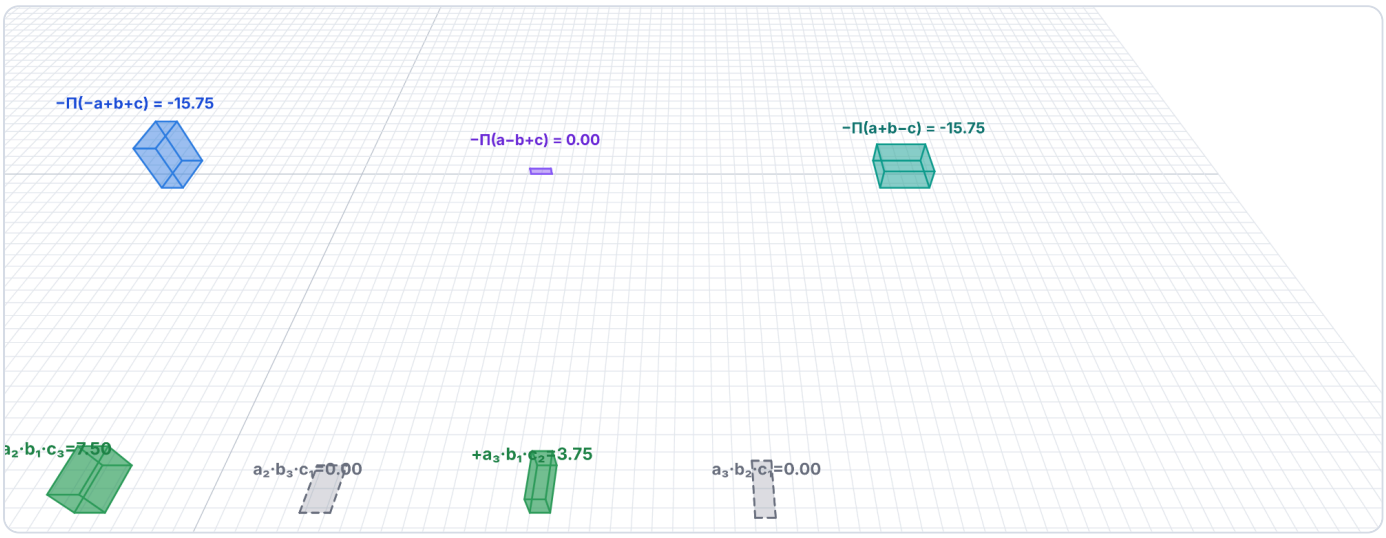


4V = 87.00 exceso = 24.00 total 4Σ = 111.00

σ	ε	término	p·q·r	ε·p·q·r	|p·q·r|
(1,2,3)	+	$p_1q_2r_3$	6.00	6.00	6.00
(1,3,2)	−	$p_1q_3r_2$	-3.75	3.75	3.75
(2,1,3)	−	$p_2q_1r_3$	-7.50	7.50	7.50
(2,3,1)	+	$p_2q_3r_1$	3.75	3.75	3.75
(3,1,2)	+	$p_3q_1r_2$	3.75	3.75	3.75
(3,2,1)	−	$p_3q_2r_1$	3.00	-3.00	3.00

Figura 6.4 — $q_3<0$ P=(1, 1.5, 1), Q=(−2.5, 3, −2.5), R=(0, −1.5, 2)





✘ **No: Σ > |det|.** Suman: **$+p_1q_2r_3$**, **$-p_2q_1r_3$**, **$+p_3q_1r_2$** (T_+ = 17.25). Restan: **$-p_1q_3r_2$** (T_- = 3.75).

En el determinante se compensan parcialmente (det = $T_+ - T_-$ = 13.50, V = 13.50), pero en Σ todo suma (Σ = $T_+ + T_-$ = 21.00). El lado izquierdo sigue siendo 4Σ = 84.00, y supera a 4V en 8·mín(T_+, T_-) = **30.00**.

4V = 54.00 exceso = 30.00 total 4Σ = 84.00

σ	ε	término	p·q·r	ε·p·q·r	|p·q·r|
(1,2,3)	+	$p_1q_2r_3$	6.00	6.00	6.00
(1,3,2)	−	$p_1q_3r_2$	3.75	-3.75	3.75
(2,1,3)	−	$p_2q_1r_3$	-7.50	7.50	7.50
(2,3,1)	+	$p_2q_3r_1$	0.00	0.00	0.00
(3,1,2)	+	$p_3q_1r_2$	3.75	3.75	3.75
(3,2,1)	−	$p_3q_2r_1$	0.00	0.00	0.00

Figura 6.5 — Todo positivo P=(2, 1, 1), Q=(1, 2, 1), R=(1, 1, 2)



✘ No: Σ > |det|. Suman: **$+p_1q_2r_3$**, **$+p_2q_3r_1$**, **$+p_3q_1r_2$** (T_+ = 10.00). Restan: **$-p_1q_3r_2$**, **$-p_2q_1r_3$**, **$-p_3q_2r_1$** (T_- = 6.00).

En el determinante se compensan parcialmente (det = $T_+ - T_-$ = 4.00, V = 4.00), pero en Σ todo suma (Σ = $T_+ + T_-$ = 16.00). El lado izquierdo sigue siendo 4Σ = 64.00, y supera a 4V en 8·mín(T_+, T_-) = **48.00**.

Las nueve coordenadas son distintas de 0: en ese caso la igualdad es imposible (sección 3).

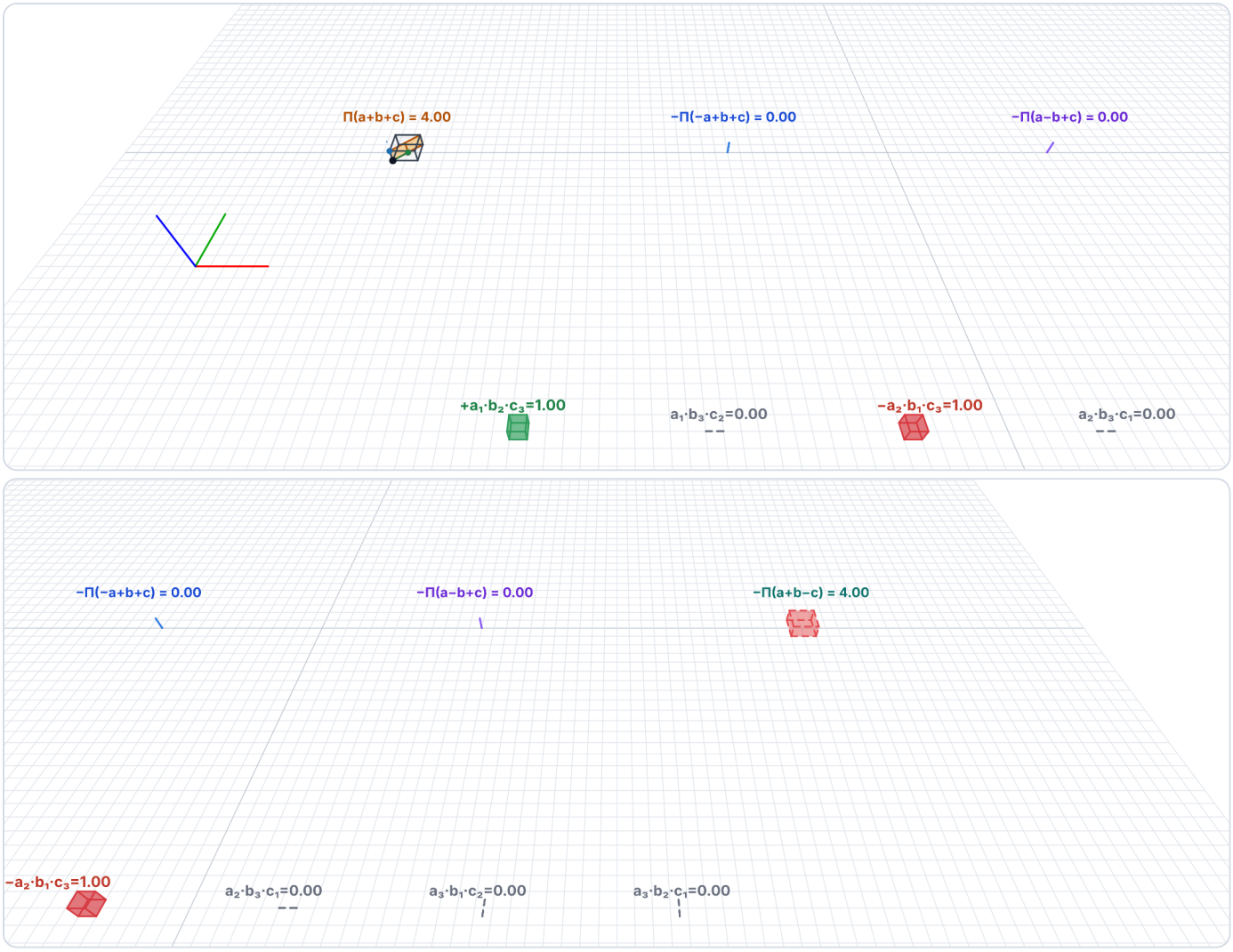
$r_1 \neq 0$: entran en juego los términos que contienen a r_1, $p_2q_3r_1$ y $p_3q_2r_1$.



4V = 16.00 exceso = 48.00 total 4Σ = 64.00

σ	ε	término	p·q·r	ε·p·q·r	|p·q·r|
(1,2,3)	+	$p_1q_2r_3$	8.00	8.00	8.00
(1,3,2)	−	$p_1q_3r_2$	2.00	-2.00	2.00
(2,1,3)	−	$p_2q_1r_3$	2.00	-2.00	2.00
(2,3,1)	+	$p_2q_3r_1$	1.00	1.00	1.00
(3,1,2)	+	$p_3q_1r_2$	1.00	1.00	1.00
(3,2,1)	−	$p_3q_2r_1$	2.00	-2.00	2.00

Figura 6.6 — Plano (V=0) P=(1, 1, 0), Q=(1, 1, 0), R=(0, 0, 1)



✘ **No: Σ > |det|.** Suman: **+$p_1q_2r_3$** (T_+ = 1.00). Restan: **−$p_2q_1r_3$** (T_- = 1.00).

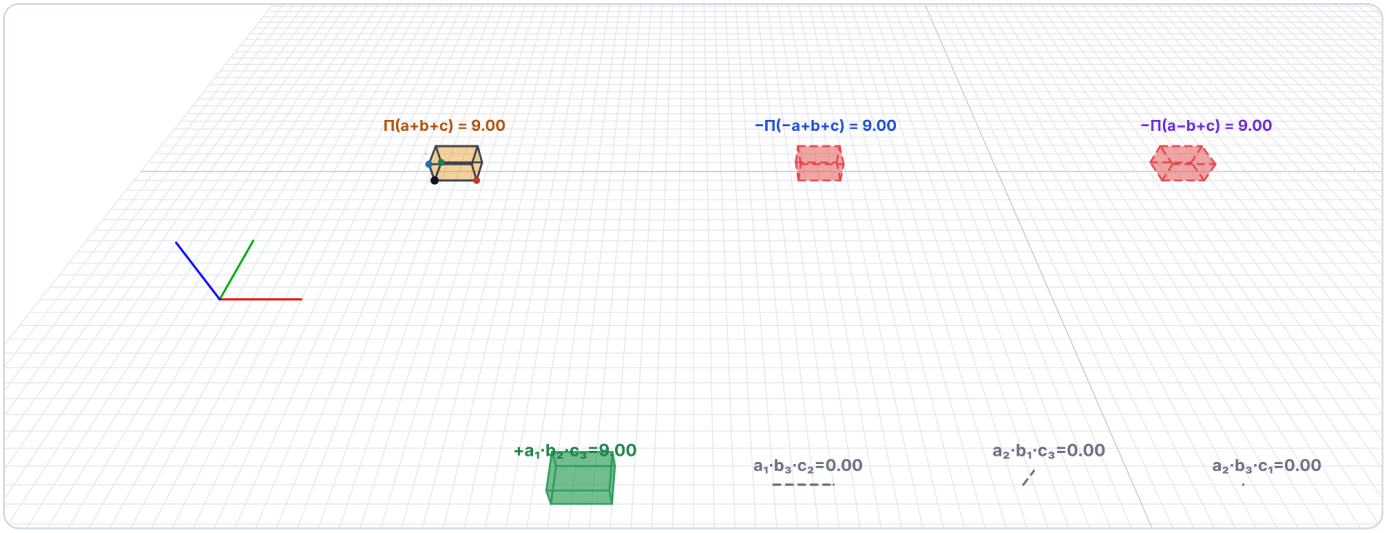
En el determinante se compensan parcialmente (det = $T_+ - T_-$ = 0.00, V = 0.00), pero en Σ todo suma (Σ = $T_+ + T_-$ = 2.00). El lado izquierdo sigue siendo 4Σ = 8.00, y supera a 4V en 8·mín(T_+, T_-) = **8.00**.

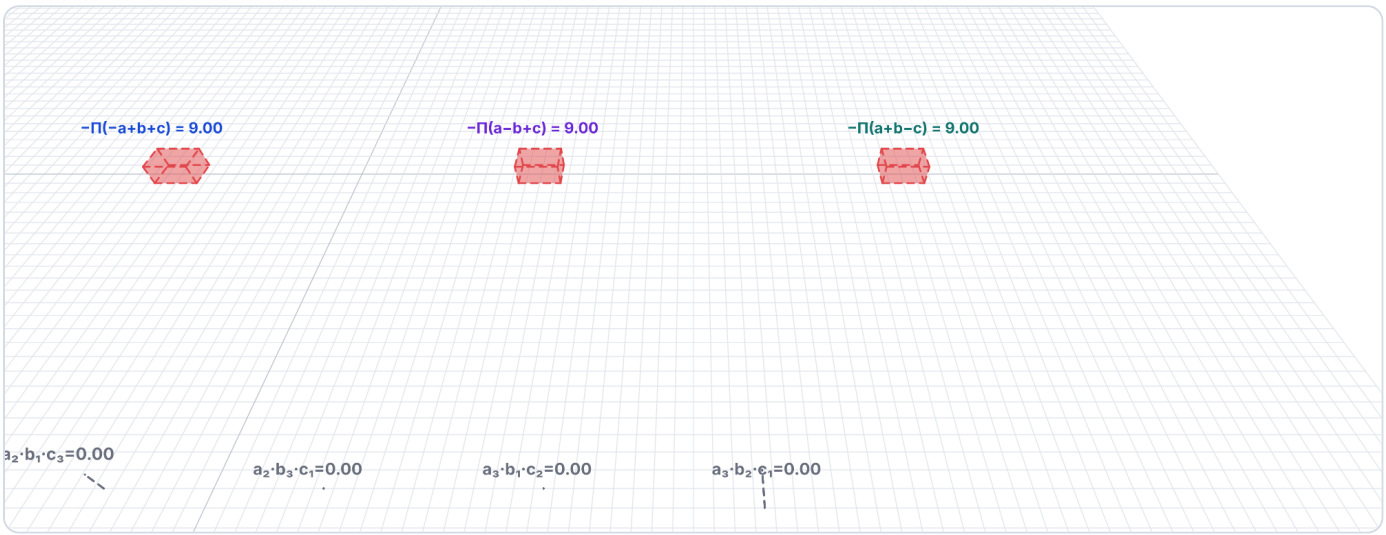
Aquí V = 0 (paralelepípedo plano) pero Σ > 0.

4V = 0.00 exceso = 8.00 total 4Σ = 8.00

σ	ε	término	p·q·r	ε·p·q·r	|p·q·r|
(1,2,3)	+	$p_1q_2r_3$	1.00	1.00	1.00
(1,3,2)	−	$p_1q_3r_2$	0.00	0.00	0.00
(2,1,3)	−	$p_2q_1r_3$	1.00	-1.00	1.00
(2,3,1)	+	$p_2q_3r_1$	0.00	0.00	0.00
(3,1,2)	+	$p_3q_1r_2$	0.00	0.00	0.00
(3,2,1)	−	$p_3q_2r_1$	0.00	0.00	0.00

Figura 6.7 — Ortoedro recto P=(3, 0, 0), Q=(0, 2, 0), R=(0, 0, 1.5)





✔ **Sí: Σ = |det| = 9.00.** El único término no nulo es **+p₁q₂r₃**, y no hay otro con el que cancelarse, así que en el determinante no se cancela nada y 4V = lado izquierdo = 36.00.

4V = 36.00 exceso = 0.00 total 4Σ = 36.00

σ	ε	término	p·q·r	ε·p·q·r	|p·q·r|
(1,2,3)	+	$p_1q_2r_3$	9.00	9.00	9.00
(1,3,2)	−	$p_1q_3r_2$	0.00	0.00	0.00
(2,1,3)	−	$p_2q_1r_3$	0.00	0.00	0.00
(2,3,1)	+	$p_2q_3r_1$	0.00	0.00	0.00
(3,1,2)	+	$p_3q_1r_2$	0.00	0.00	0.00
(3,2,1)	−	$p_3q_2r_1$	0.00	0.00	0.00

7. Resumen

- Siempre: Π(a+b+c) − Π(−a+b+c) − Π(a−b+c) − Π(a+b−c) = 4Σ, con a, b, c los valores absolutos de las coordenadas de P, Q, R.
- Siempre: 4V ≤ 4Σ, y 4Σ − 4V = 8·mín(T_+, T_-).
- Hay igualdad exactamente cuando los términos no nulos del determinante tienen todos el mismo signo. Con los signos $p_i \geq 0$; $q_1 \leq 0$, $q_2, q_3 \geq 0$; $r_1 = 0$, $r_2 \leq 0$, $r_3 \geq 0$ se cumple, y entonces el ortoedro grande menos los tres ortoedros es exactamente 4 veces el volumen del paralelepípedo.
- Con las nueve coordenadas no nulas la igualdad nunca se da.

Dado un paralelepípedo, ¿existe un sistema de coordenadas en el que siempre V = Σ?

El volumen V de un paralelepípedo no depende de los ejes que usemos, pero la suma Σ de los seis productos en valor absoluto sí. Siempre Σ ≥ V. Aquí estudiamos si, dado el paralelepípedo, se pueden elegir ejes ortonormales para que se dé la igualdad, y qué pasa con el resto de los sistemas.

1. La pregunta

Un paralelepípedo con un vértice en el origen O queda determinado por tres vectores OP, OQ y OR. Si elegimos un sistema de ejes ortonormales (tres rectas perpendiculares entre sí por O), P, Q y R tienen coordenadas $\mathrm{P} = (\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3)$, $\mathrm{Q} = (\mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2, \mathrm{q}_3)$, $\mathrm{R} = (\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3)$, y las ponemos como filas de una matriz M. Definimos

$$\Sigma(\mathrm{M}) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_3} |p_{\sigma(1)}| \cdot |q_{\sigma(2)}| \cdot |r_{\sigma(3)}| \quad , \quad \mathrm{V} = |\det \mathrm{M}|$$

Es la suma de los seis productos que aparecen en el determinante, pero con valores absolutos (la *permanente* de la matriz de valores absolutos). Con $a_i = |p_i|$, $b_i = |q_i|$, $c_i = |r_i|$, es la Σ de las páginas anteriores, y cuando Σ = V la identidad $4\cdot\Sigma = \Pi(a+b+c) - \Pi(-a+b+c) - \Pi(a-b+c) - \Pi(a+b-c)$ dice que 4V es una diferencia de ortoedros.

- **V no cambia al girar los ejes**: V = |det M| y girar los ejes multiplica M por una matriz ortogonal, que no cambia el valor absoluto del determinante.
- **Σ sí cambia**, porque las coordenadas cambian.
- **Siempre Σ ≥ V**, ya que $|\det \mathrm{M}| = |\mathrm{T}_+ - \mathrm{T}_-| \le \mathrm{T}_+ + \mathrm{T}_- = \Sigma$. Aquí T_+ es la suma de los términos del determinante que valen más que 0 y T_- es la de los que valen menos que 0, ambas en valor absoluto. La diferencia es exactamente **$\Sigma - \mathrm{V} = 2\cdot\min(\mathrm{T}_+, \mathrm{T}_-)$**.

> **Pregunta.** Fijado el paralelepípedo, ¿existe algún sistema de ejes ortonormales para el que Σ = V? Y si existe, ¿cómo de especial es? ¿Se da en cualquier sistema?

2. Respuesta: sí existe, siempre

Elegimos los ejes adaptados a los vectores, como en el método de Gram–Schmidt (la factorización QR):

- el eje x, en la dirección de P;
- el plano xy, el plano que contiene a P y a Q (con Q hacia y positivo);
- el eje z, perpendicular a ese plano, con la orientación que deja a R hacia z positivo.

En esos ejes, $\mathrm{P} = (p_1, 0, 0)$, $\mathrm{Q} = (q_1, q_2, 0)$ y $\mathrm{R} = (r_1, r_2, r_3)$; la matriz es triangular inferior. De los seis productos $p_{\sigma(1)}q_{\sigma(2)}r_{\sigma(3)}$, solo puede ser no nulo el de la identidad, porque $p_2 = p_3 = 0$ obliga a $\sigma(1) = 1$, y entonces $q_3 = 0$ obliga a $\sigma(2) = 2$. Queda un único término:

$$\det \mathrm{M} = p_1 q_2 r_3, \quad \Sigma = |p_1 q_2 r_3| = |\det \mathrm{M}| = \mathrm{V}$$

Como no hay otro término con el que cancelarse, **Σ = V**. Esto funciona para cualquier paralelepípedo, y también si se cambia el orden de los vectores (el eje x sobre Q o sobre R, etc.): hay seis sistemas de este tipo, uno por cada orden de los tres vectores.

Qué pasa con la identidad. En esos ejes, $\Sigma = a_1 \cdot b_2 \cdot c_3$ y los ortoedros se simplifican mucho: solo queda no nulo el ortoedro $a_1 \times b_2 \times c_3$, que tiene exactamente el volumen V del paralelepípedo. Es decir, el ortoedro construido con las componentes diagonales tiene el mismo volumen que el paralelepípedo.

---

3. Pero no en cualquier sistema

Los sistemas con Σ = V son muy especiales. Para que se dé la igualdad hace falta que los términos no nulos del determinante tengan todos el mismo signo (si no, T_+ y T_- son positivos y $\Sigma - V = 2 \cdot \min(T_+, T_-) > 0$). Y hay una obstrucción más fuerte:

> **Si las nueve coordenadas son distintas de 0, nunca hay igualdad.** Las tres permutaciones pares usan, entre las tres, cada posición de la matriz exactamente una vez, y lo mismo las tres impares. Por eso el producto de los tres términos pares y el de los tres impares valen ambos el producto M de las nueve coordenadas. Si los seis términos con signo tuvieran el mismo signo, esos dos productos tendrían el mismo signo, pero valen M y −M. Contradicción (si M ≠ 0).

Por tanto, para que se dé la igualdad hace falta que alguna coordenada sea 0. Girar los ejes un poco hacia una posición «cualquiera» destruye los ceros y entonces Σ > V. Las posiciones de los ejes con alguna coordenada nula forman un conjunto delgado dentro del conjunto de todas las posiciones (una superficie dentro de un espacio de tres parámetros); casi cualquier sistema da Σ > V.

Esta página lo muestra con tres herramientas: un visor 3D en el que se puede girar el sistema de ejes, una gráfica de Σ/V al mover un ángulo y un histograma de Σ/V para sistemas elegidos al azar.

---

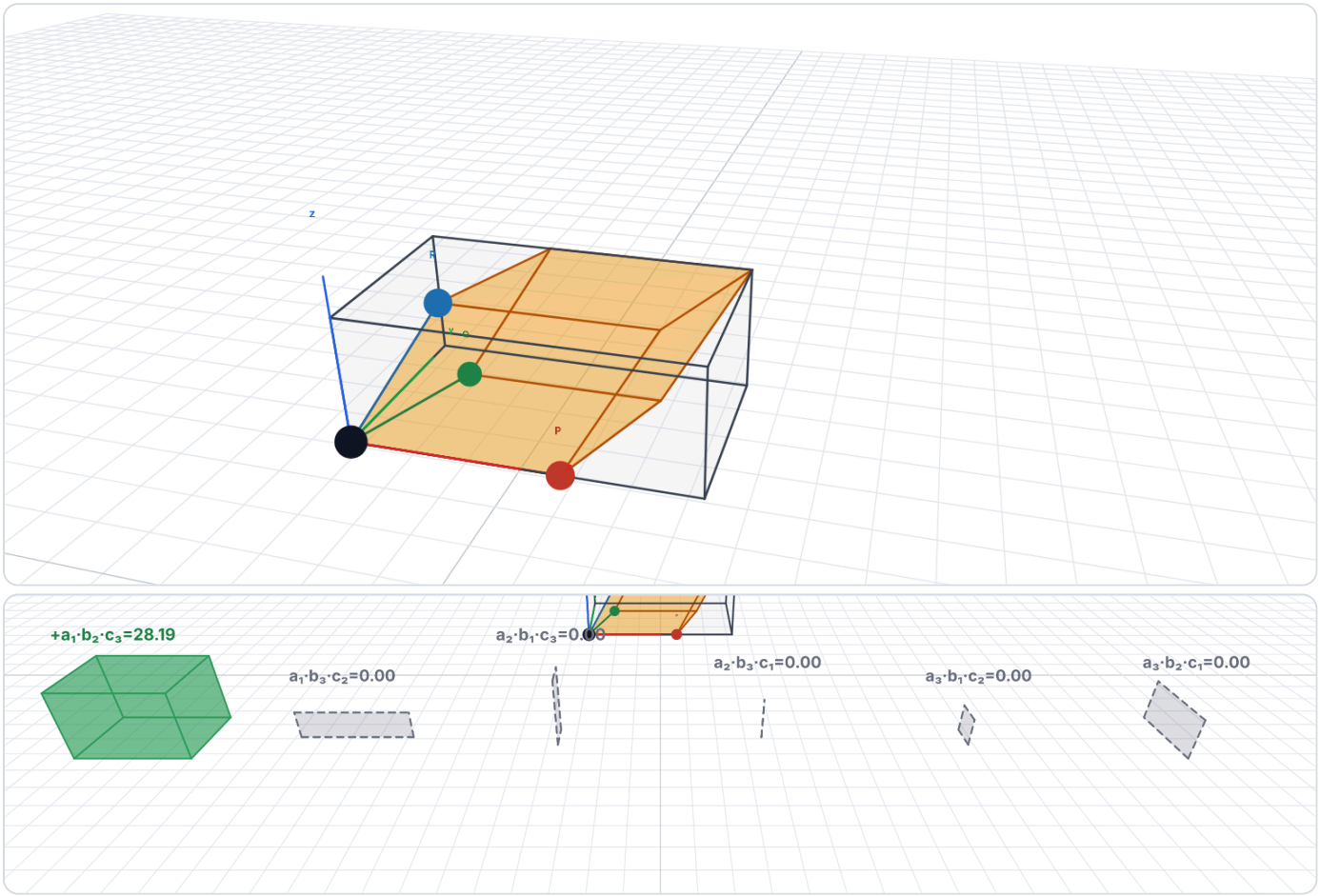
4. Ejemplos con el paralelepípedo y los ejes

El paralelepípedo se define con seis datos, siempre válidos: la longitud de P (que va sobre el eje x), la longitud y el ángulo de Q (que está en el plano xy) y las tres coordenadas de R. El sistema de ejes se cambia eligiendo uno de los seis **marcos base** adaptados, en los que Σ = V, y con tres **giros adicionales** (ψ, θ, φ, alrededor de z, y y x) aplicados encima del marco base. Girar los ejes equivale a girar el paralelepípedo dentro de unos ejes fijos, y eso es lo que muestran las figuras.

Qué mirar en cada figura: el paralelepípedo (naranja) dentro de su ortoedro contenedor, que mide $a_i+b_i+c_i$ en cada eje, con los ejes x (rojo), y (verde), z (azul); los seis ortoedros de aristas $a_{\sigma(1)} \times b_{\sigma(2)} \times c_{\sigma(3)}$, **verdes** si el término con signo del determinante es positivo, **rojos** si es negativo y **grises** si es nulo (V = |verdes − rojos|, Σ = verdes + rojos); y cuántas de las nueve coordenadas valen 0 (hace falta al menos una para que Σ = V).

suma resta nulo paralelepípedo contenedor

Figura 4.1 — Paralelepípedo genérico en el marco adaptado |P|=4, |Q|=3, ∠PQ=70°, R=(1.5, 1, 2.5), base 1



✔ **Sí: Σ = V = 28.19.** Solo hay un término no nulo, **$+p_1q_2r_3$**, y no tiene con quién cancelarse.

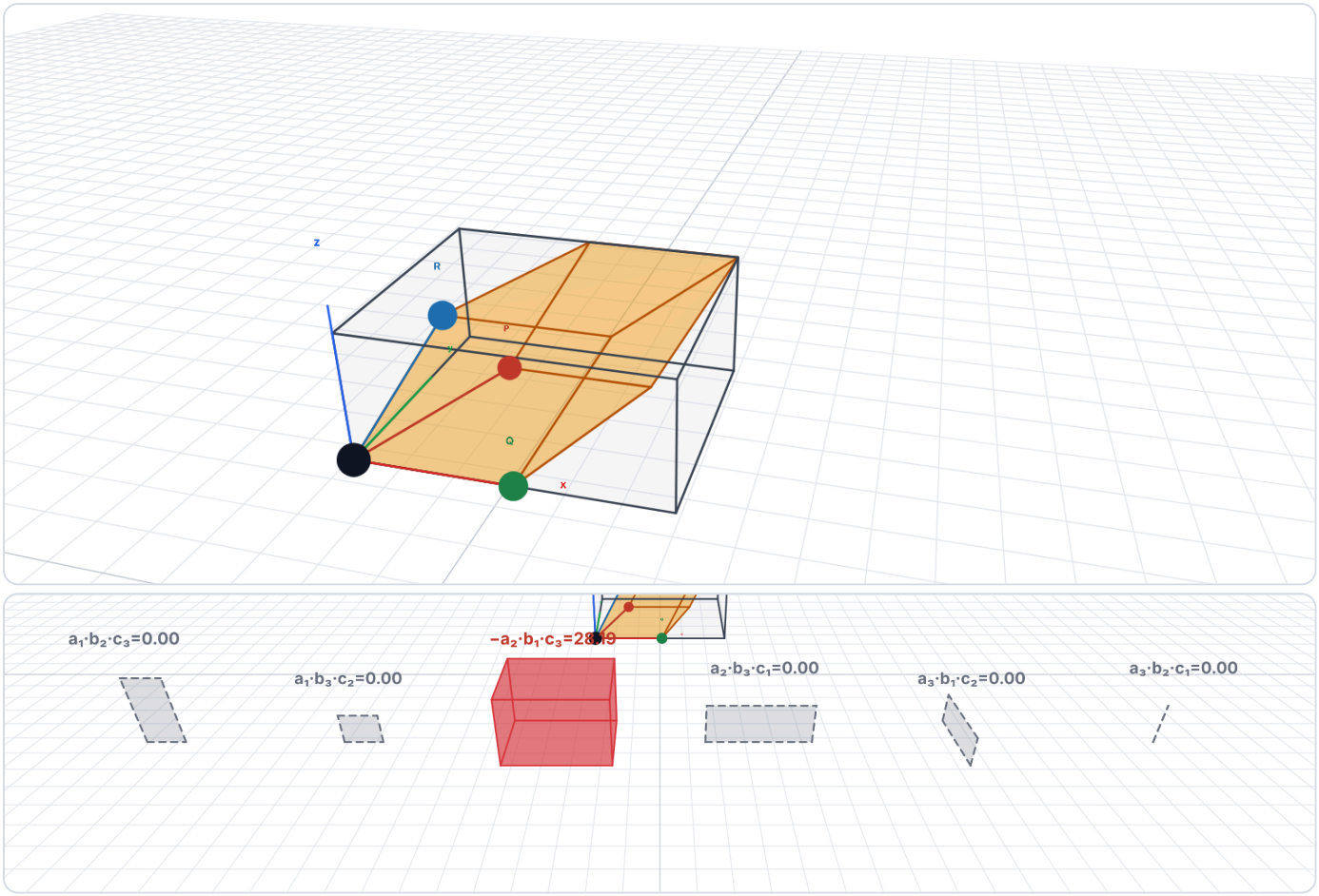
Coordenadas nulas: 3 de 9.

V = 28.19 Σ − V = 0.00 Σ = 28.19

P	4.00	0.00	0.00
Q	1.03	2.82	0.00
R	1.50	1.00	2.50

σ	ε	término	ε·p·q·r	|p·q·r|
(1,2,3)	+	$p_1q_2r_3$	28.19	28.19
(1,3,2)	−	$p_1q_3r_2$	0.00	0.00
(2,1,3)	−	$p_2q_1r_3$	0.00	0.00
(2,3,1)	+	$p_2q_3r_1$	0.00	0.00
(3,1,2)	+	$p_3q_1r_2$	0.00	0.00
(3,2,1)	−	$p_3q_2r_1$	0.00	0.00

Figura 4.2 — El mismo, con otro marco base (x ∥ Q) |P|=4, |Q|=3, ∠PQ=70°, R=(1.5, 1, 2.5), base 3



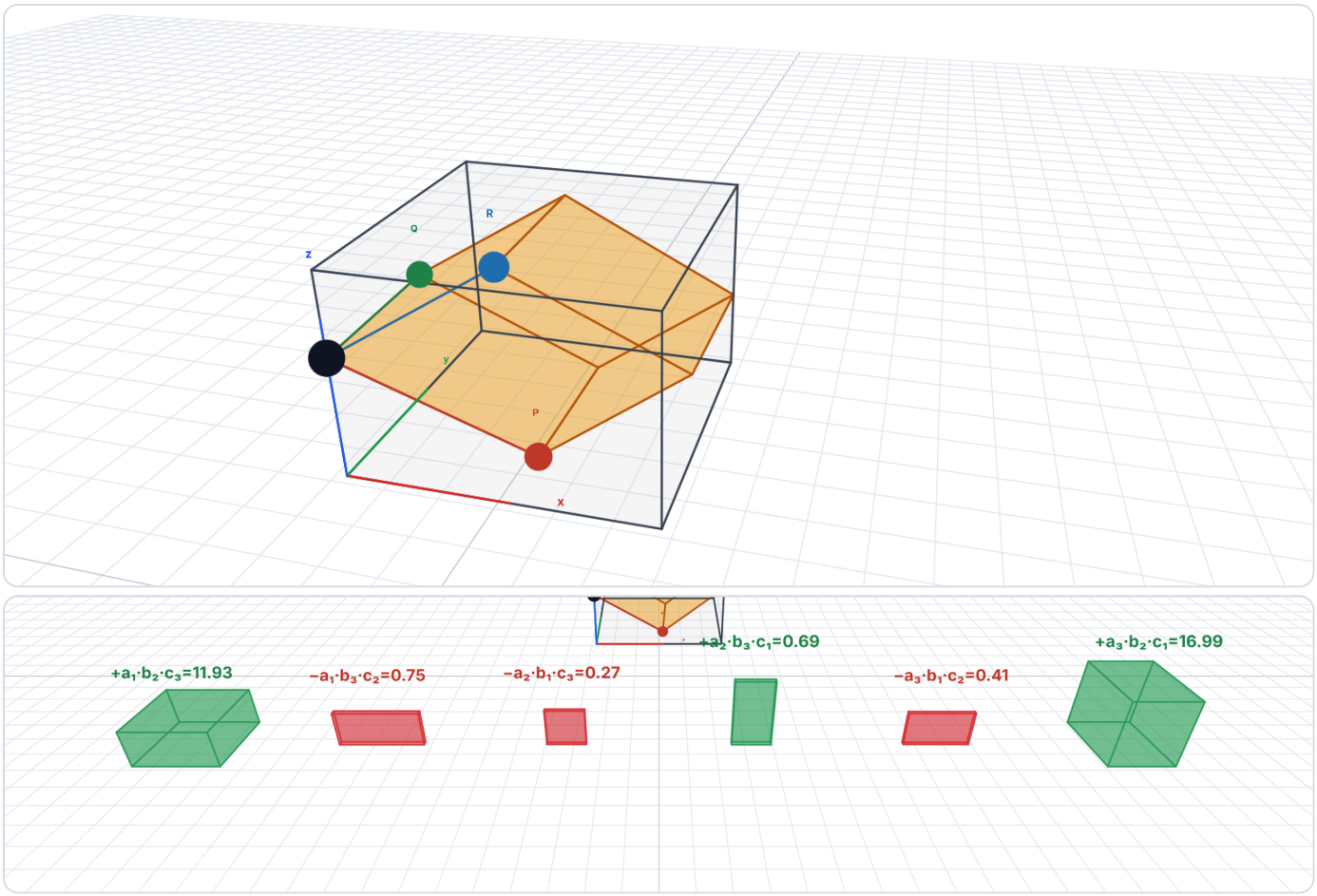
✔ **Sí: Σ = V = 28.19.** Solo hay un término no nulo, **$-p_2q_1r_3$**, y no tiene con quién cancelarse.
Coordenadas nulas: 3 de 9.

V = 28.19 Σ − V = 0.00 Σ = 28.19

P	1.37	3.76	0.00
Q	3.00	0.00	0.00
R	1.45	1.07	2.50

σ	ε	término	ε·p·q·r	|p·q·r|
(1,2,3)	+	$p_1q_2r_3$	0.00	0.00
(1,3,2)	−	$p_1q_3r_2$	0.00	0.00
(2,1,3)	−	$p_2q_1r_3$	-28.19	28.19
(2,3,1)	+	$p_2q_3r_1$	0.00	0.00
(3,1,2)	+	$p_3q_1r_2$	0.00	0.00
(3,2,1)	−	$p_3q_2r_1$	0.00	0.00

Figura 4.3 — El mismo, con un giro (ψ, θ, φ) = (25°, 35°, 20°) |P|=4, |Q|=3, ∠PQ=70°, R=(1.5, 1, 2.5), base 1



✘ **No: Σ > V.** Suman: **+p₁q₂r₃, +p₂q₃r₁, −p₃q₂r₁** (T_+ = 29.61). Restan: **−p₁q₃r₂, −p₂q₁r₃, +p₃q₁r₂** (T_- = 1.42).

En el determinante se compensan (V = $T_+ - T_-$ = 28.19); en Σ todo suma (Σ = 31.04). La diferencia es 2·mín(T_+, T_-) = **2.85**.

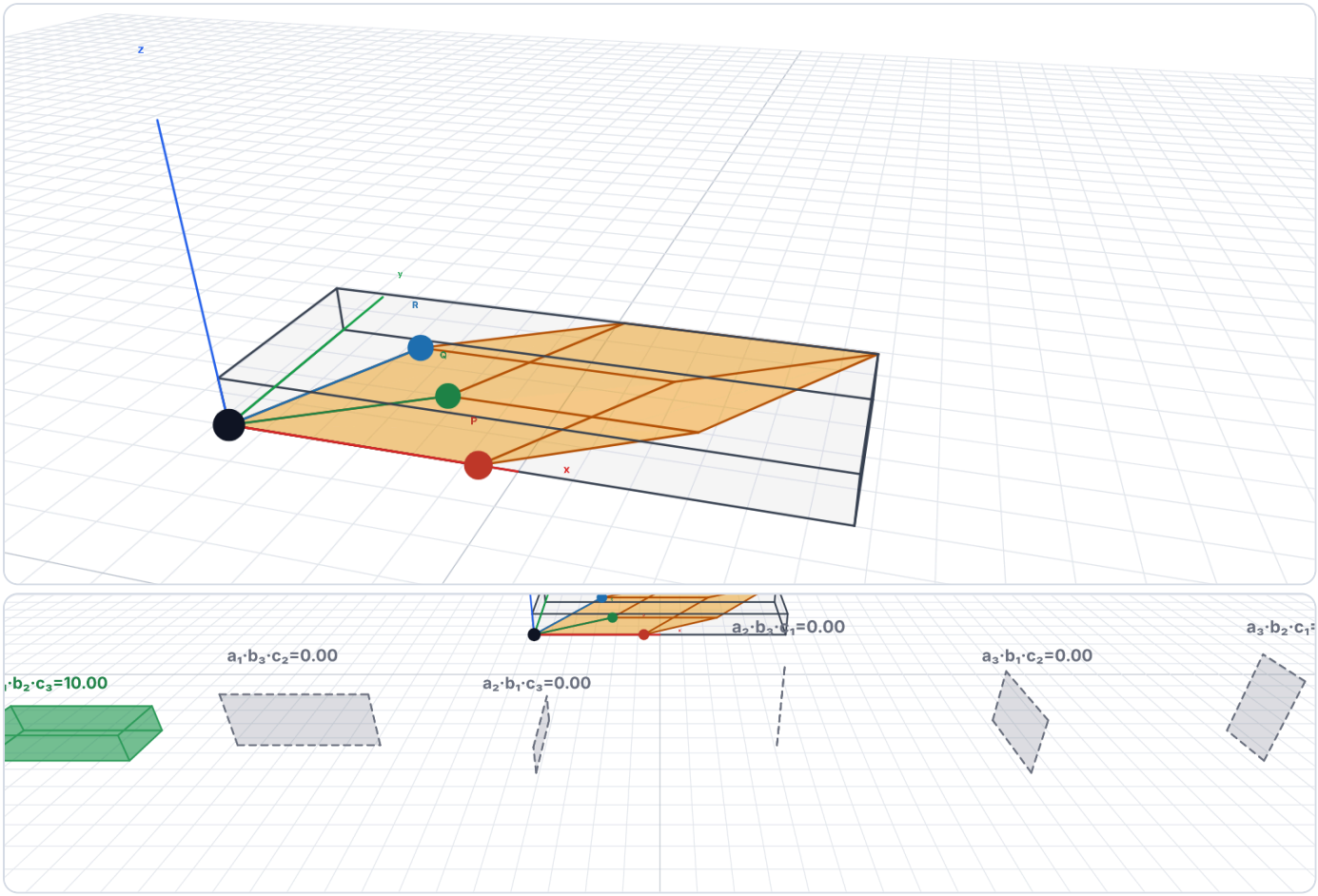
Coordenadas nulas: 0 de 9. Con las nueve distintas de 0 la igualdad es imposible.

V = 28.19 Σ − V = 2.85 Σ = 31.04

P	2.97	1.38	-2.29
Q	0.14	2.99	0.20
R	2.48	1.25	1.34

σ	ε	término	ε·p·q·r	|p·q·r|
(1,2,3)	+	$p_1q_2r_3$	11.93	11.93
(1,3,2)	−	$p_1q_3r_2$	-0.75	0.75
(2,1,3)	−	$p_2q_1r_3$	-0.27	0.27
(2,3,1)	+	$p_2q_3r_1$	0.69	0.69
(3,1,2)	+	$p_3q_1r_2$	-0.41	0.41
(3,2,1)	−	$p_3q_2r_1$	16.99	16.99

Figura 4.4 — Muy oblicuo, en el marco adaptado $|P|=5$, $|Q|=4$, $\angle PQ=30°$, $R=(3, 2, 1)$, base 1



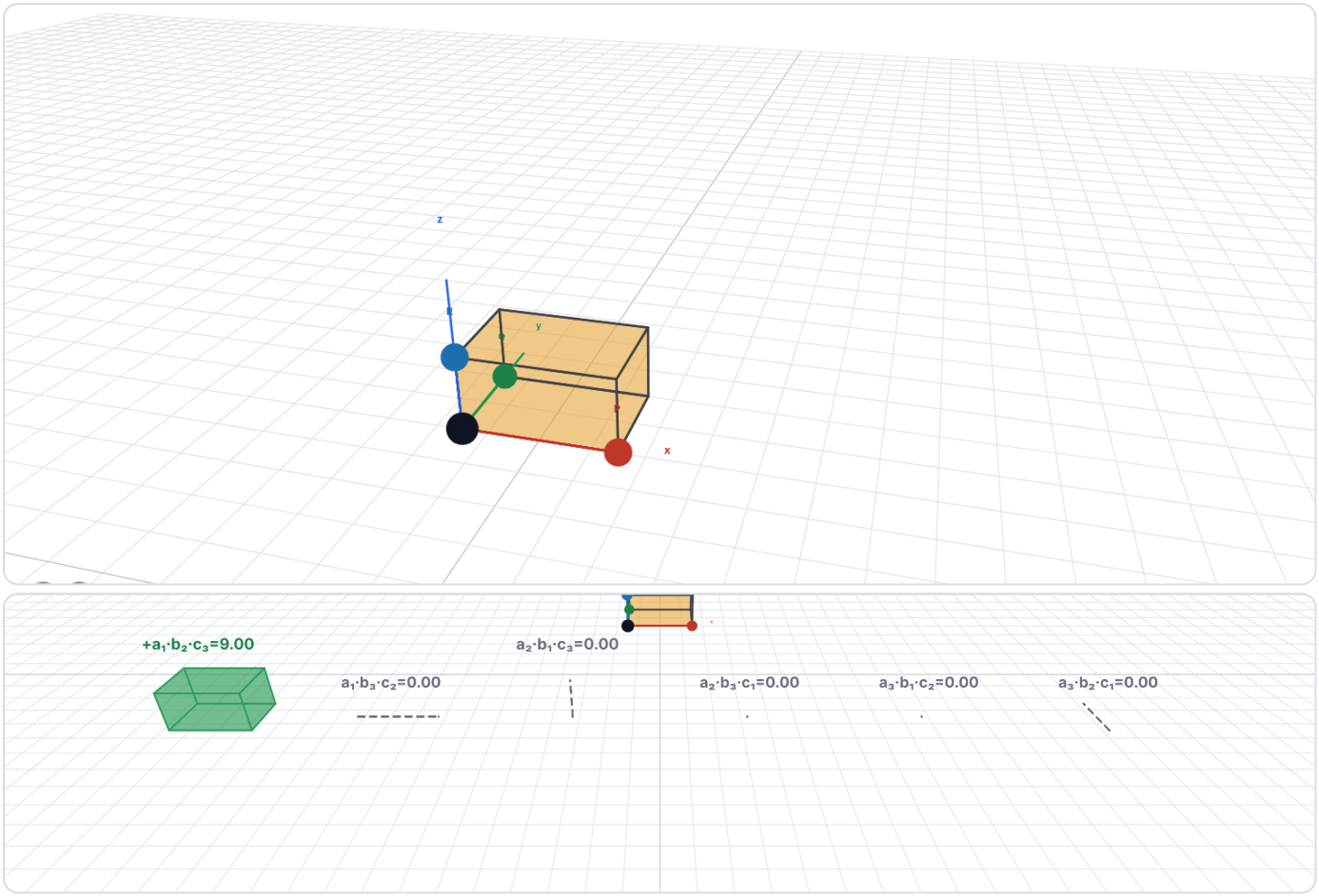
✔ **Sí: Σ = V = 10.00.** Solo hay un término no nulo, **$+p_1q_2r_3$**, y no tiene con quién cancelarse.
Coordenadas nulas: 3 de 9.

V = 10.00 Σ − V = 0.00 Σ = 10.00

P	5.00	0.00	0.00
Q	3.46	2.00	0.00
R	3.00	2.00	1.00

σ	ε	término	ε·p·q·r	|p·q·r|
(1,2,3)	+	$p_1q_2r_3$	10.00	10.00
(1,3,2)	−	$p_1q_3r_2$	0.00	0.00
(2,1,3)	−	$p_2q_1r_3$	0.00	0.00
(2,3,1)	+	$p_2q_3r_1$	0.00	0.00
(3,1,2)	+	$p_3q_1r_2$	0.00	0.00
(3,2,1)	−	$p_3q_2r_1$	0.00	0.00

Figura 4.5 — Ortoedro recto en el marco adaptado $|P|=3$, $|Q|=2$, $\angle PQ=90°$, $R=(0, 0, 1.5)$, base 1



✔ **Sí: Σ = V = 9.00.** Solo hay un término no nulo, $+p_1q_2r_3$, y no tiene con quién cancelarse.

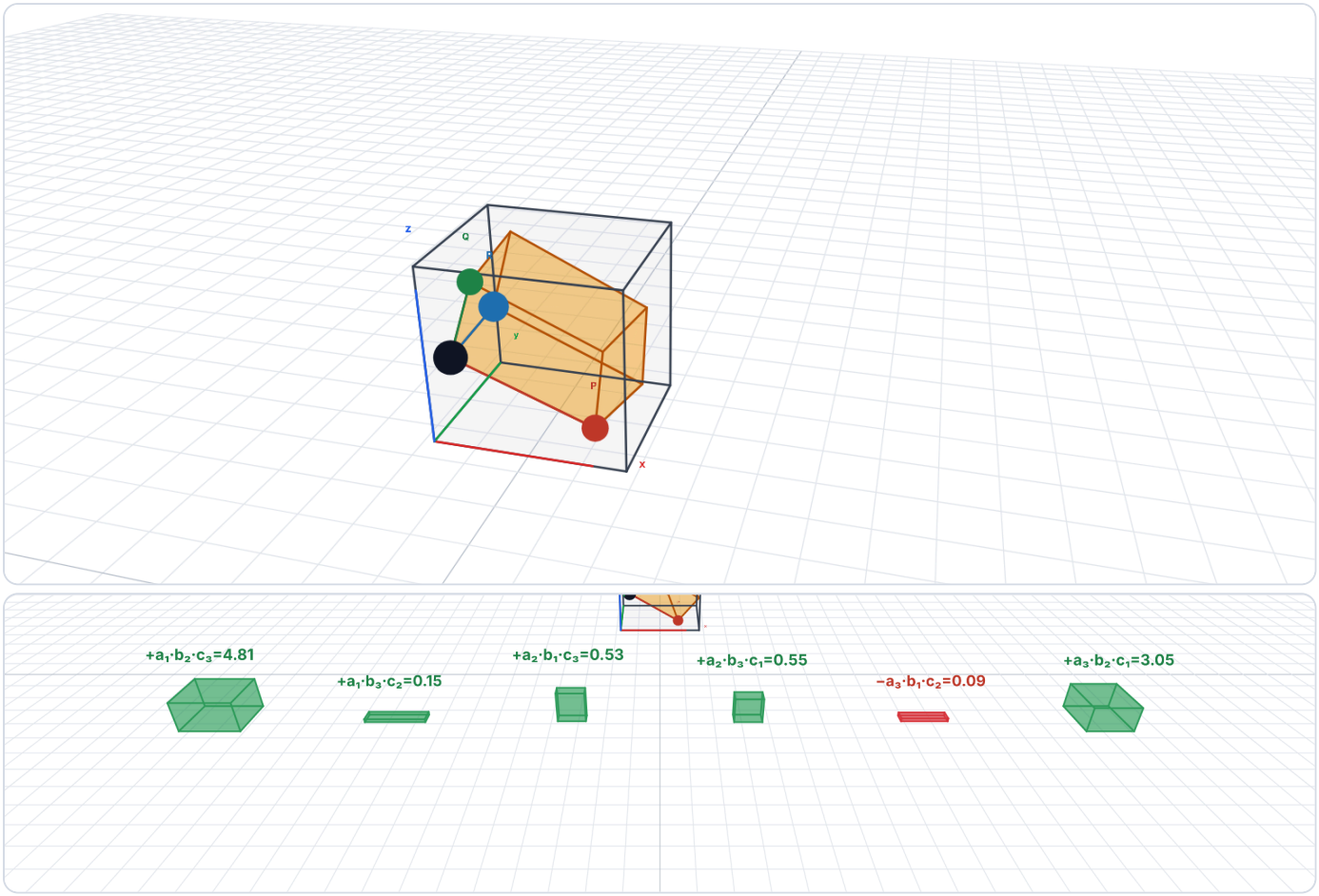
Coordenadas nulas: 6 de 9.

V = 9.00 Σ − V = 0.00 Σ = 9.00

P	3.00	0.00	0.00
Q	0.00	2.00	0.00
R	0.00	0.00	1.50

σ	ε	término	ε·p·q·r	|p·q·r|
(1,2,3)	+	$p_1q_2r_3$	9.00	9.00
(1,3,2)	−	$p_1q_3r_2$	0.00	0.00
(2,1,3)	−	$p_2q_1r_3$	0.00	0.00
(2,3,1)	+	$p_2q_3r_1$	0.00	0.00
(3,1,2)	+	$p_3q_1r_2$	0.00	0.00
(3,2,1)	−	$p_3q_2r_1$	0.00	0.00

Figura 4.6 — Ortoedro recto, con el giro (25°, 35°, 20°) |P|=3, |Q|=2, ∠PQ=90°, R=(0, 0, 1.5), base 1



✘ **No: Σ > V.** Suman: **$+p_1q_2r_3$, $-p_1q_3r_2$, $-p_2q_1r_3$, $+p_2q_3r_1$, $-p_3q_2r_1$** (T_+ = 9.09). Restan: **$+p_3q_1r_2$** (T_- = 0.09).
En el determinante se compensan (V = $T_+ - T_-$ = 9.00); en Σ todo suma (Σ = 9.19). La diferencia es 2·mín(T_+, T_-) = **0.19**.

Coordenadas nulas: 0 de 9. Con las nueve distintas de 0 la igualdad es imposible.

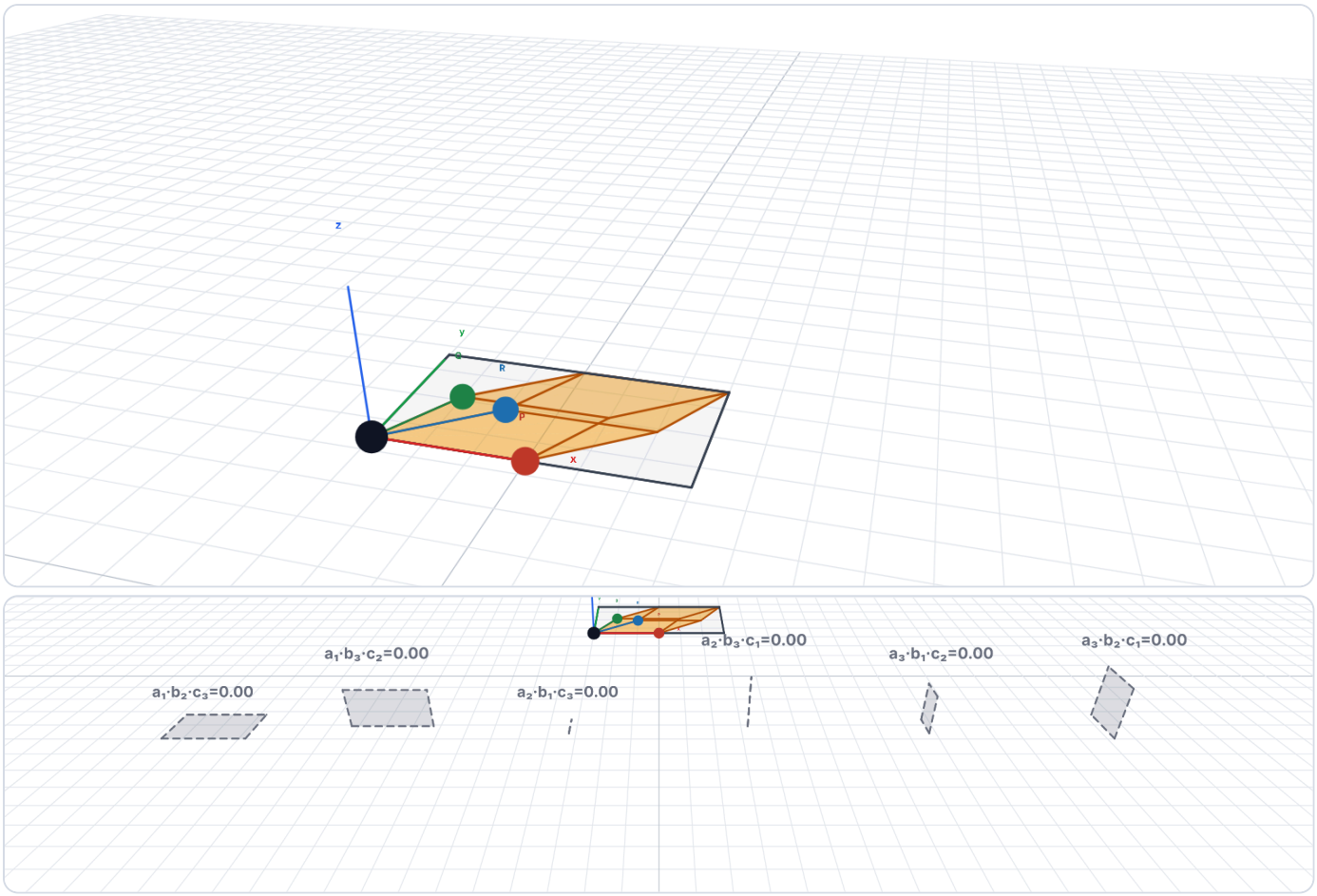


V = 9.00 Σ − V = 0.19 Σ = 9.19

P	2.23	1.04	-1.72
Q	-0.44	1.87	0.56
R	0.95	-0.12	1.15

σ	ε	término	ε·p·q·r	|p·q·r|
(1,2,3)	+	$p_1q_2r_3$	4.81	4.81
(1,3,2)	−	$p_1q_3r_2$	0.15	0.15
(2,1,3)	−	$p_2q_1r_3$	0.53	0.53
(2,3,1)	+	$p_2q_3r_1$	0.55	0.55
(3,1,2)	+	$p_3q_1r_2$	-0.09	0.09
(3,2,1)	−	$p_3q_2r_1$	3.05	3.05

Figura 4.7 — Paralelepípedo plano (V = 0), marco adaptado |P|=3, |Q|=2, ∠PQ=60°, R=(2, 1.5, 0), base 1



✔ **Coincide, de forma trivial.** Los seis productos son nulos: Σ = 0 = V.

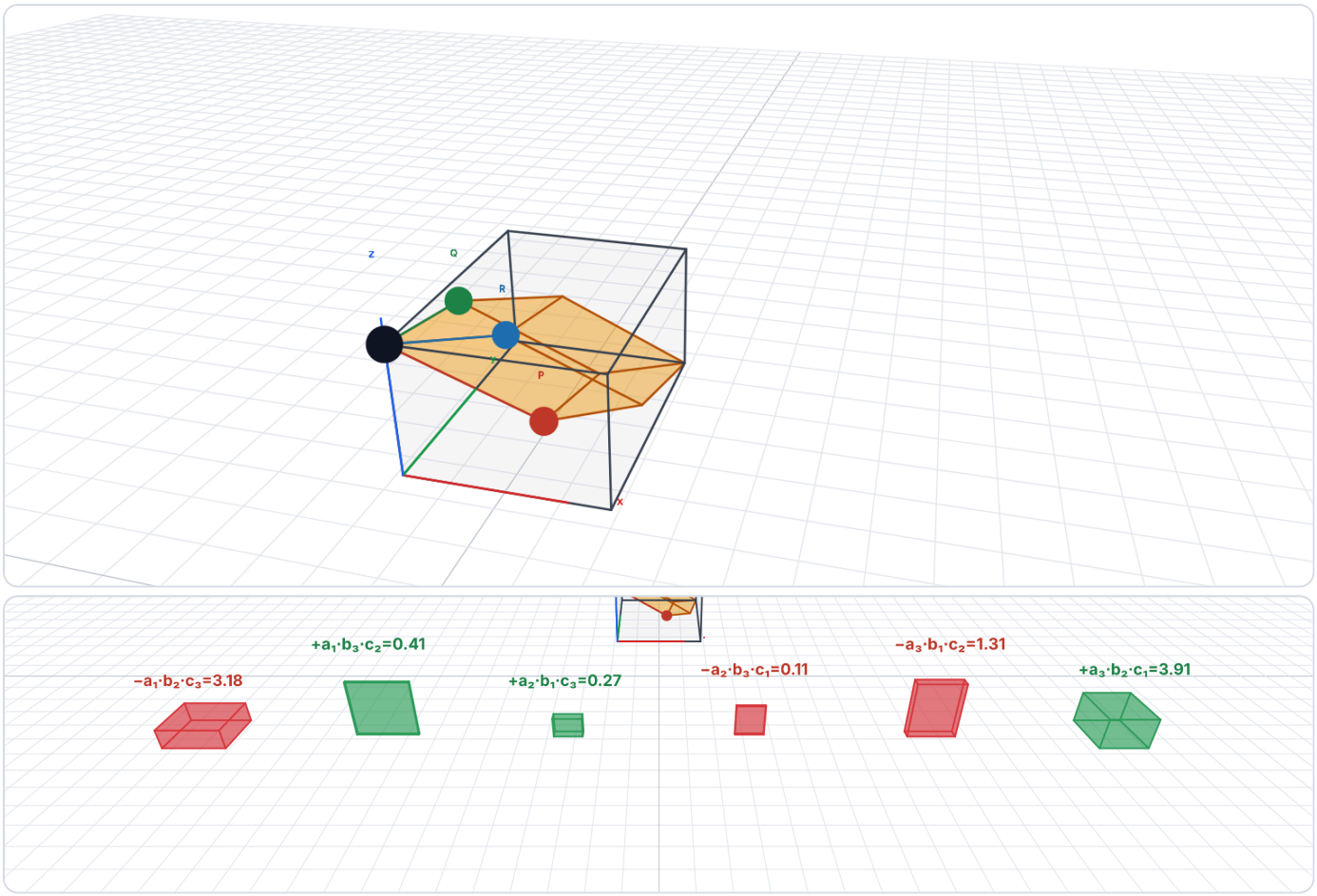
Coordenadas nulas: 4 de 9.

V = 0.00 Σ − V = 0.00 Σ = 0.00

P	3.00	0.00	0.00
Q	1.00	1.73	0.00
R	2.00	1.50	0.00

σ	ε	término	ε·p·q·r	|p·q·r|
(1,2,3)	+	$p_1q_2r_3$	0.00	0.00
(1,3,2)	−	$p_1q_3r_2$	0.00	0.00
(2,1,3)	−	$p_2q_1r_3$	0.00	0.00
(2,3,1)	+	$p_2q_3r_1$	0.00	0.00
(3,1,2)	+	$p_3q_1r_2$	0.00	0.00
(3,2,1)	−	$p_3q_2r_1$	0.00	0.00

Figura 4.8 — Paralelepípedo plano (V = 0), con el giro (25°, 35°, 20°) |P|=3, |Q|=2, ∠PQ=60°, R=(2, 1.5, 0), base 1



✘ **No: Σ > V.** Suman: **$-p_1q_3r_2$**, **$-p_2q_1r_3$**, **$-p_3q_2r_1$** (T_+ = 4.59). Restan: **$+p_1q_2r_3$**, **$+p_2q_3r_1$**, **$+p_3q_1r_2$** (T_- = 4.59).

En el determinante se compensan (V = $T_+ - T_-$ = 0.00); en Σ todo suma (Σ = 9.19). La diferencia es 2·mín(T_+, T_-) = **9.19**.

Coordenadas nulas: 0 de 9. Con las nueve distintas de 0 la igualdad es imposible.

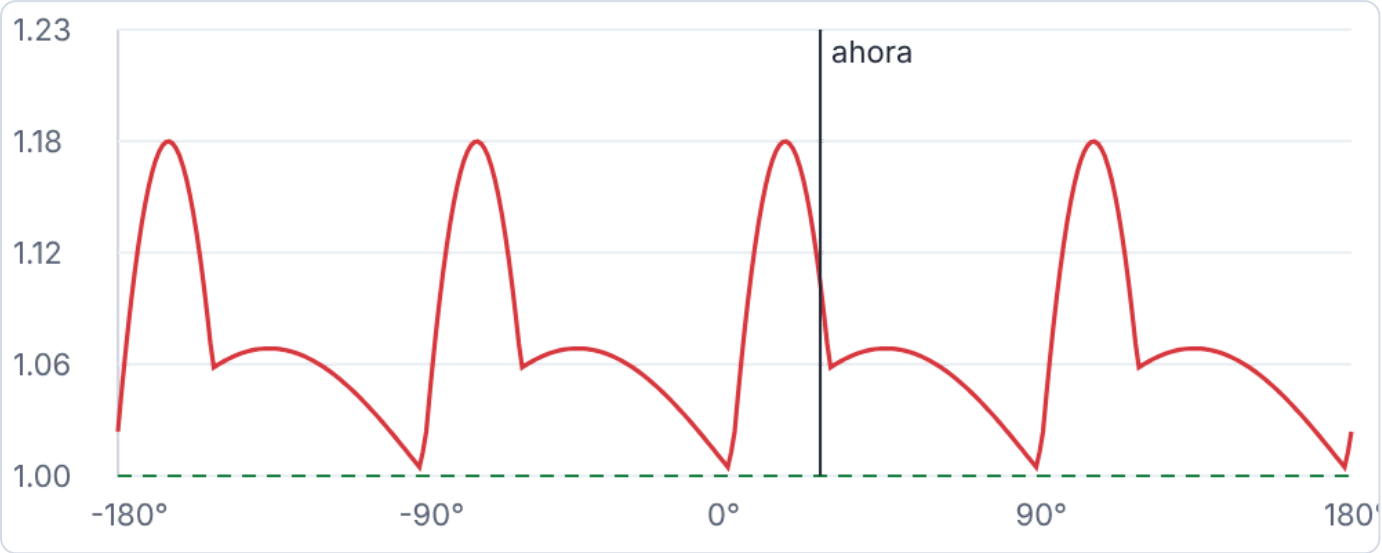
V = 0.00 Σ − V = 9.19 Σ = 9.19

P	2.23	1.04	-1.72
Q	0.36	1.96	-0.09
R	1.16	2.09	-0.73

σ	ε	término	ε·p·q·r	|p·q·r|
(1,2,3)	+	$p_1q_2r_3$	-3.18	3.18
(1,3,2)	−	$p_1q_3r_2$	0.41	0.41
(2,1,3)	−	$p_2q_1r_3$	0.27	0.27
(2,3,1)	+	$p_2q_3r_1$	-0.11	0.11
(3,1,2)	+	$p_3q_1r_2$	-1.31	1.31
(3,2,1)	−	$p_3q_2r_1$	3.91	3.91

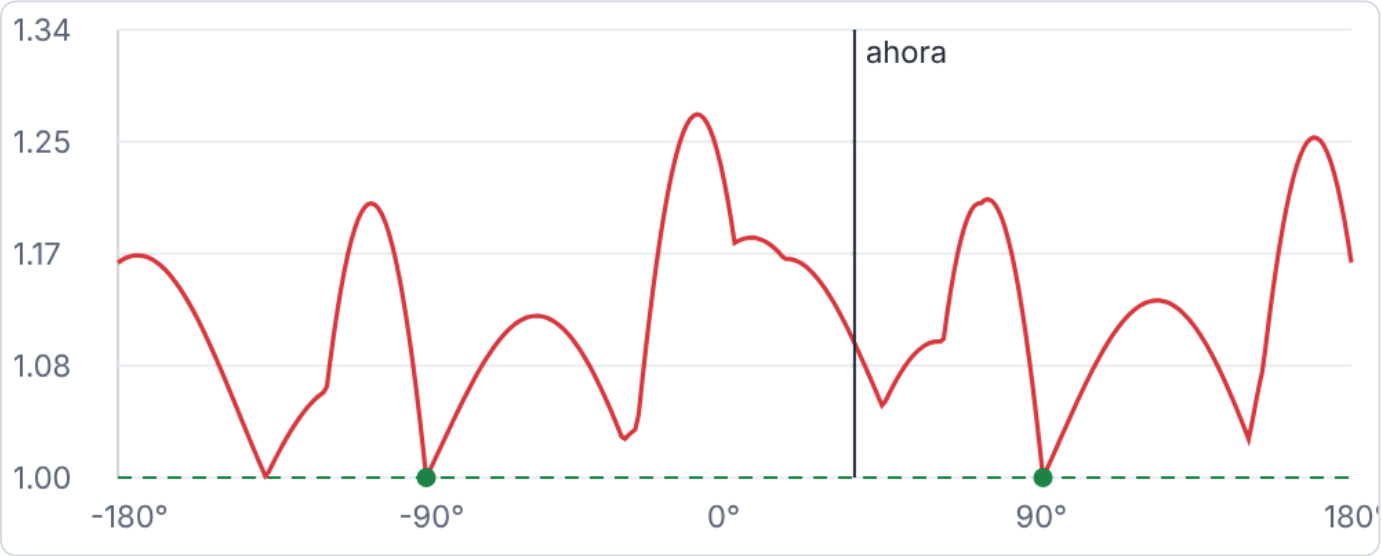
Σ/V al girar los ejes (figuras 4.9 a 4.12)

Figura 4.9 — Σ/V al variar ψ (alrededor de z)



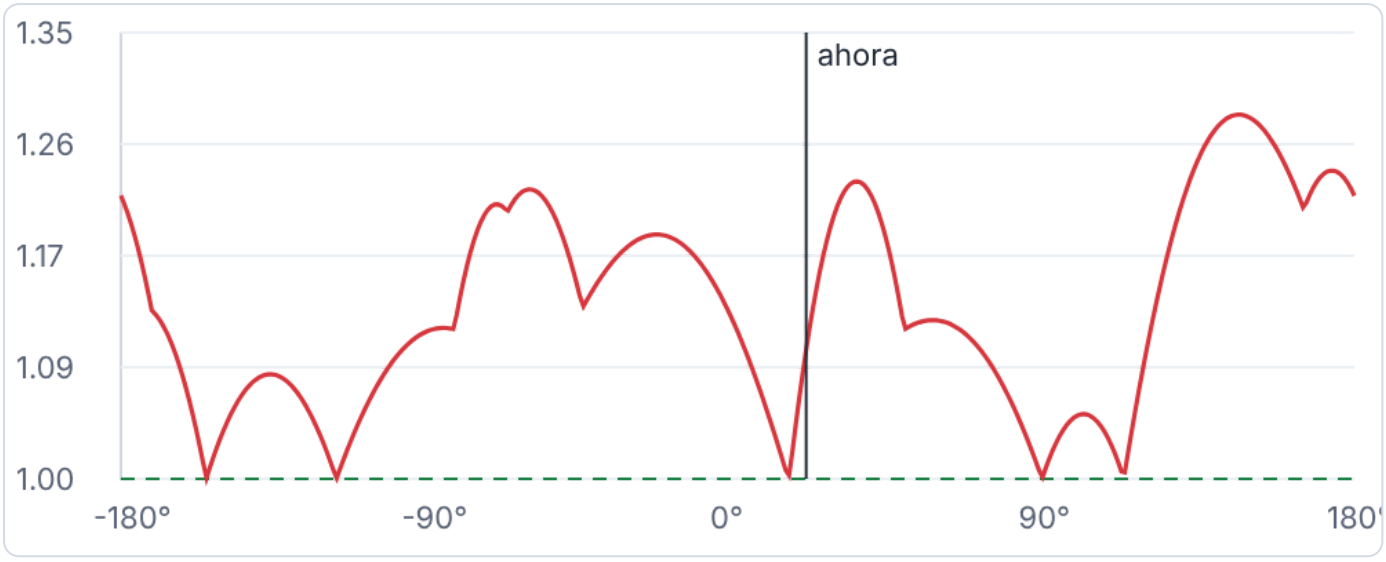
Paralelepípedo genérico con el giro (25°, 35°, 20°); los otros dos ángulos y el marco base se mantienen. Los puntos verdes son los ángulos en que Σ = V; la línea discontinua es Σ/V = 1.

Figura 4.10 — Σ/V al variar θ (alrededor de y)



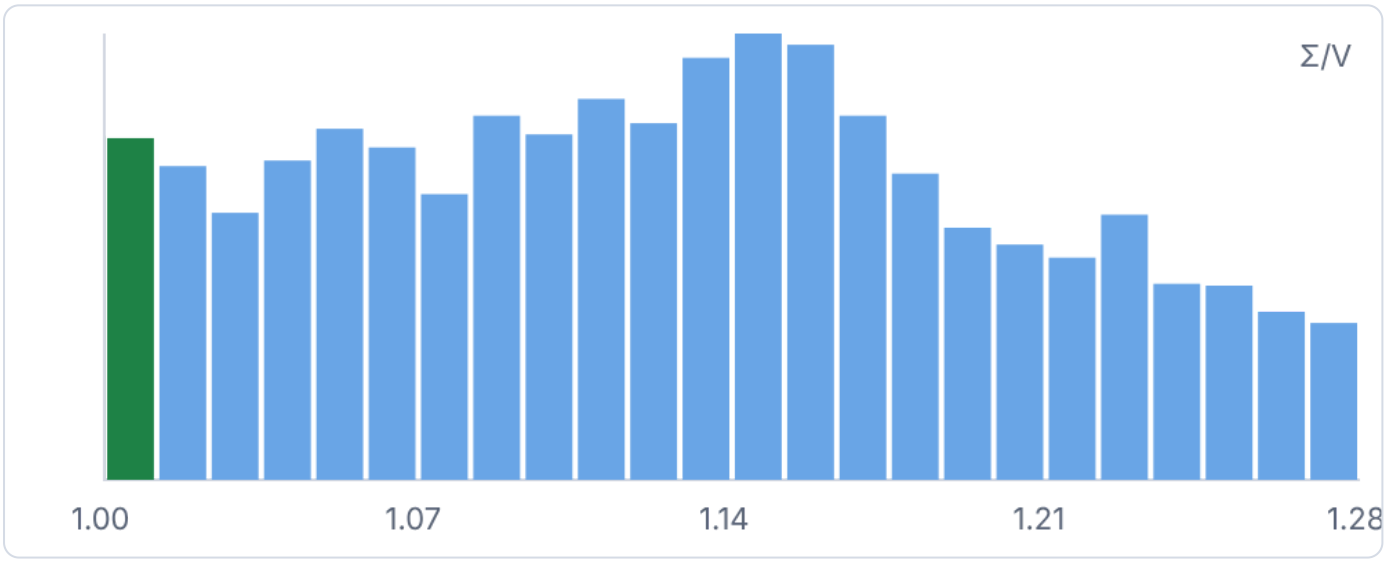
Paralelepípedo genérico con el giro (25°, 35°, 20°); los otros dos ángulos y el marco base se mantienen. Los puntos verdes son los ángulos en que Σ = V; la línea discontinua es Σ/V = 1.

Figura 4.11 — Σ/V al variar φ (alrededor de x)



Paralelepípedo genérico con el giro (25°, 35°, 20°); los otros dos ángulos y el marco base se mantienen. Los puntos verdes son los ángulos en que Σ = V; la línea discontinua es Σ/V = 1.

Figura 4.12 — Σ/V en sistemas de ejes al azar



muestra de 4000 ejes al azar. mín = **1.000** · mediana = **1.13** · percentil 90 = **1.24** · máx = **1.32**
Con Σ/V < 1,01: **4.03%** de los sistemas (igualdad exacta: 0 %).

Las curvas tocan la línea Σ/V = 1 solo en ángulos aislados, y a veces ninguno. El histograma muestra que, con ejes tomados al azar, la igualdad exacta no se da (el cociente solo se acerca a 1 en una minoría de sistemas, y casi todos quedan claramente por encima).

---

5. Los 24 ortoedros dentro del contenedor

La identidad Π(a+b+c) − Π(−a+b+c) − Π(a−b+c) − Π(a+b−c) = 4Σ dice que 4Σ es la suma de los volúmenes de **4 copias de cada uno de los seis ortoedros** $a_{\sigma(1)} \times b_{\sigma(2)} \times c_{\sigma(3)}$. Si los seis son no nulos hay 6 × 4 = **24 ortoedros**. Con ceros desaparecen: por ejemplo, con $r_1 = 0$ quedan 4 tipos y 16 ortoedros (el caso de la página anterior).

> **¿Cuántos hay en el caso P = (p_1, 0, 0), Q = (q_1, q_2, 0), R = (r_1, r_2, r_3)?** Solo uno de los seis productos es no nulo, $a_1 \cdot b_2 \cdot c_3$, así que solo hay **4 ortoedros** (cuatro copias de $a_1 \times b_2 \times c_3$), de volumen total 4V. Los 24 aparecen cuando los seis productos son no nulos, es decir, en ejes «genéricos», que son justo los que dan Σ > V.

Para colocarlos en el contenedor, de dimensiones $(a_1+b_1+c_1) \times (a_2+b_2+c_2) \times (a_3+b_3+c_3)$, se usa una «aspa» tridimensional:

- **Seis placas**, dos por cada eje. Las dos de grosor c_3 son perpendiculares a z (abajo y arriba), las de grosor c_2 lo son a y (delante y detrás) y las de grosor c_1 lo son a x (izquierda y derecha). Cada placa se desplaza hacia un lado distinto, como las aspas de un molinillo.
- Cada placa se parte, como en el caso 2D, en **4 ortoedros más un hueco**: dos ortoedros $a_i \times b_j \times c_k$, dos $b_i \times a_j \times c_k$ y un hueco $(a_i - b_i)(a_j - b_j) \cdot c_k$, que cuenta con signo. En total son 6 × 4 = 24 ortoedros y 6 huecos.
- En el centro queda el bloque $(a_1+b_1-c_1)(a_2+b_2-c_2)(a_3+b_3-c_3) = \Pi(a+b-c)$, y en dos esquinas opuestas quedan dos cubitos de aristas $c_1 \times c_2 \times c_3$.

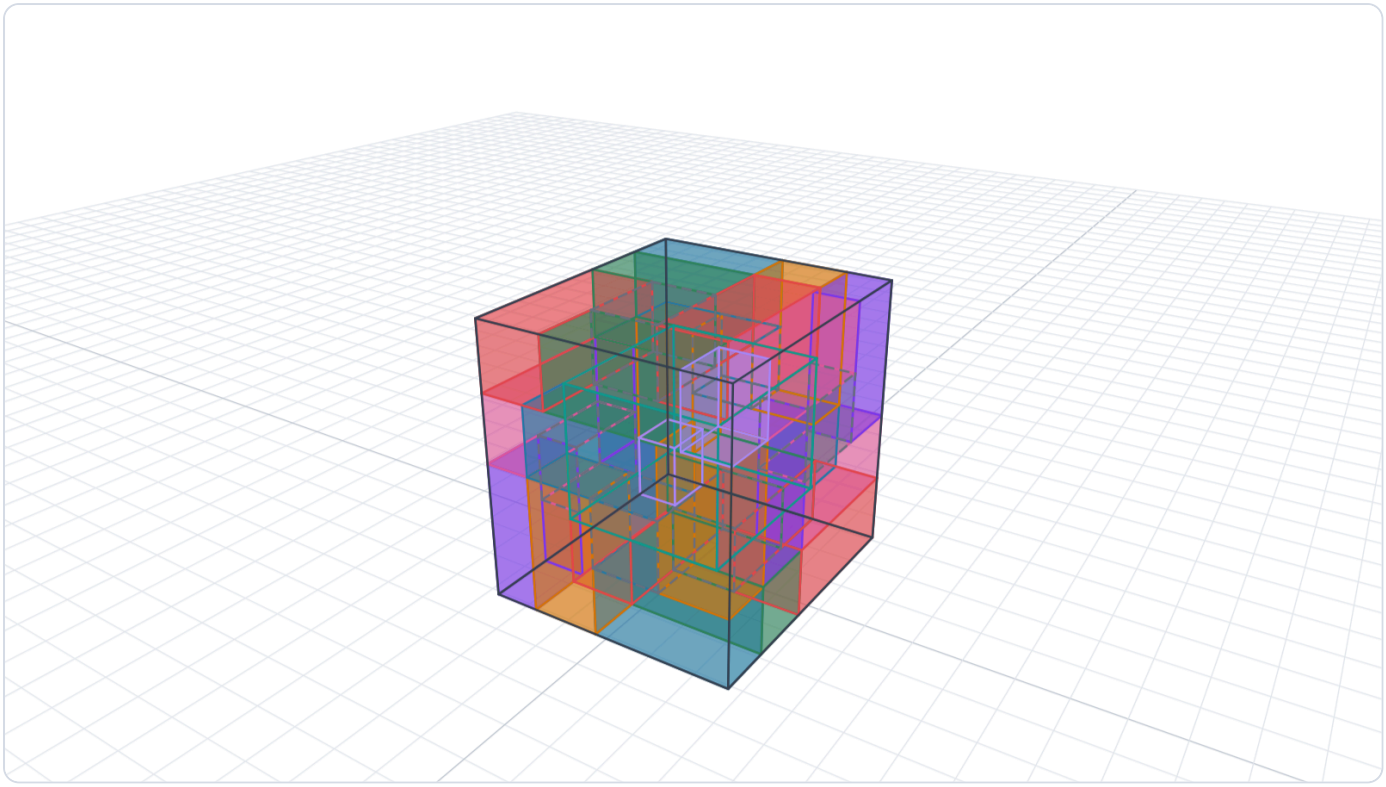
$$\Pi(a+b+c) = 24 \text{ ortoedros} + 6 \text{ huecos} + \Pi(a+b-c) + 2 \cdot c_1 c_2 c_3$$

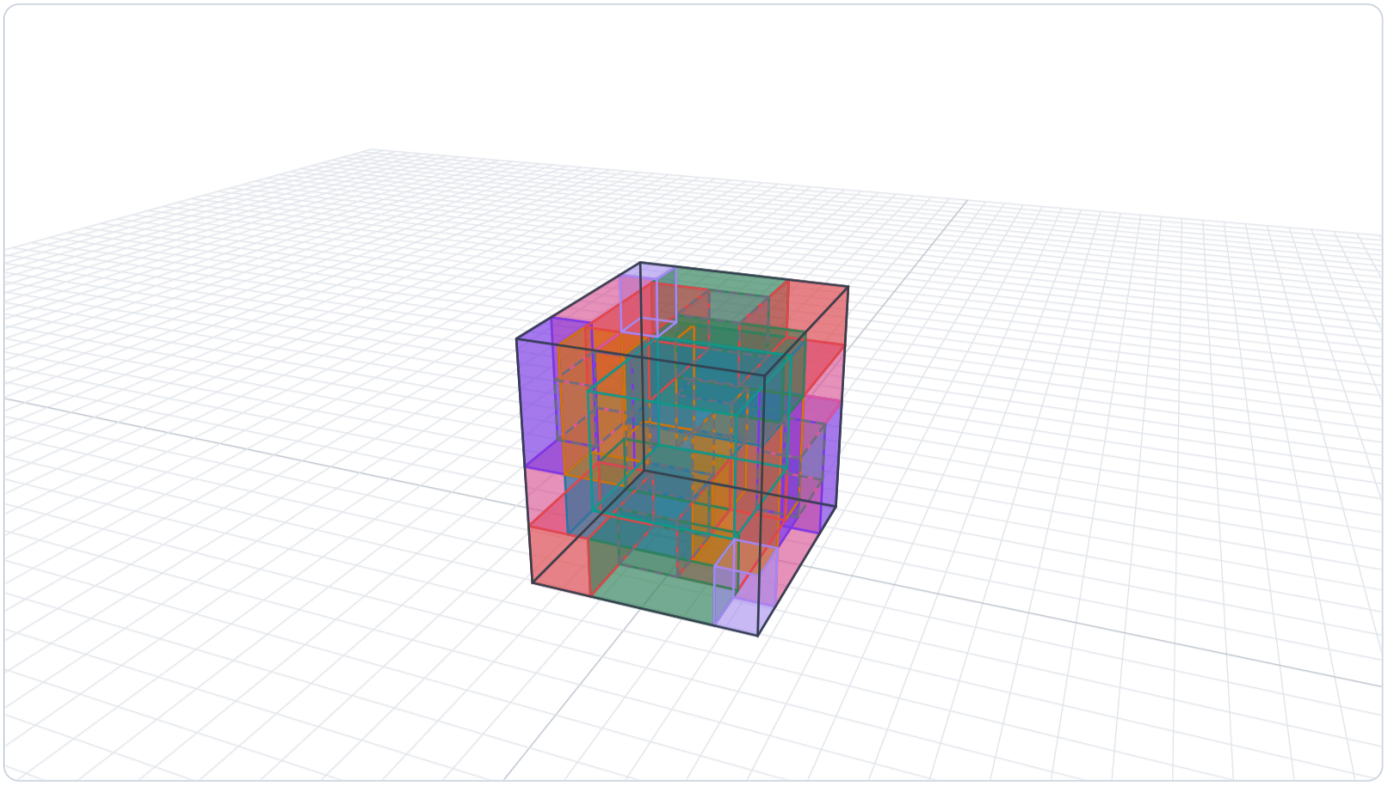
Como los 24 ortoedros suman 4Σ, y los seis huecos más los dos cubitos suman $\Pi(-a+b+c) + \Pi(a-b+c)$, la fórmula es otra forma de escribir la identidad. Con $c_1 = 0$ no hay placas perpendiculares a x ni cubitos, y vuelve el caso de 16 ortoedros y 4 huecos.

Las figuras de esta sección muestran el contenedor con las nueve coordenadas dadas (de P, Q y R); solo cuentan sus valores absolutos para el relleno y sus signos para el determinante.



Figura 5.1 — 24 ortoedros (genérico) P=(3, 3.5, 3), Q=(−1.5, 1.5, 1.5), R=(1, −1.2, 1.5)





Ortoedros no nulos: **24** de 24 (6 tipos de 6). Σ = **35.17**, V = |det| = **26.17** (Σ > V).

Los ortoedros suman 4Σ: ✔

Contenedor = 24 ortoedros + 6 huecos + bloque central + 2 cubitos: ✔

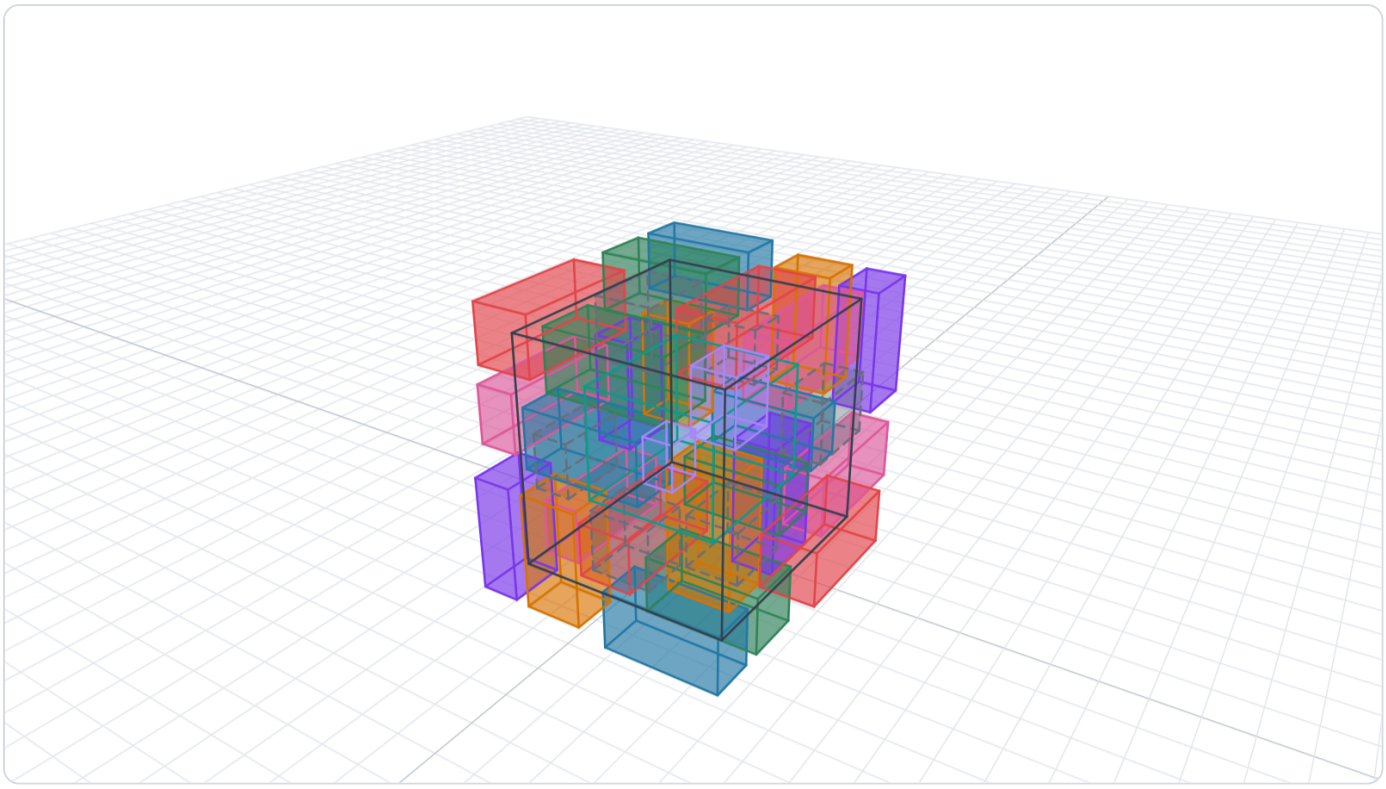
Bloque central = Π(a+b−c): ✔

6 huecos + 2 cubitos = Π(−a+b+c) + Π(a−b+c): ✔

tipo	cada uno	ortoedros	total
$a_1 \cdot b_2 \cdot c_3$	6.75	4	27.00
$a_1 \cdot b_3 \cdot c_2$	5.40	4	21.60
$a_2 \cdot b_1 \cdot c_3$	7.88	4	31.50
$a_2 \cdot b_3 \cdot c_1$	5.25	4	21.00
$a_3 \cdot b_1 \cdot c_2$	5.40	4	21.60
$a_3 \cdot b_2 \cdot c_1$	4.50	4	18.00
Contenedor Π(a+b+c)			204.60
24 ortoedros (suma)			140.70

4Σ	140.70
6 huecos (con signo)	20.40
Bloque central Π(a+b−c)	39.90
2 cubitos $c_1 \cdot c_2 \cdot c_3$	3.60
Π(−a+b+c) + Π(a−b+c)	24.00
Suma: 24 + huecos + central + cubitos	204.60

Figura 5.2 — 24 ortoedros, piezas separadas P=(3, 3.5, 3), Q=(−1.5, 1.5, 1.5), R=(1, −1.2, 1.5)

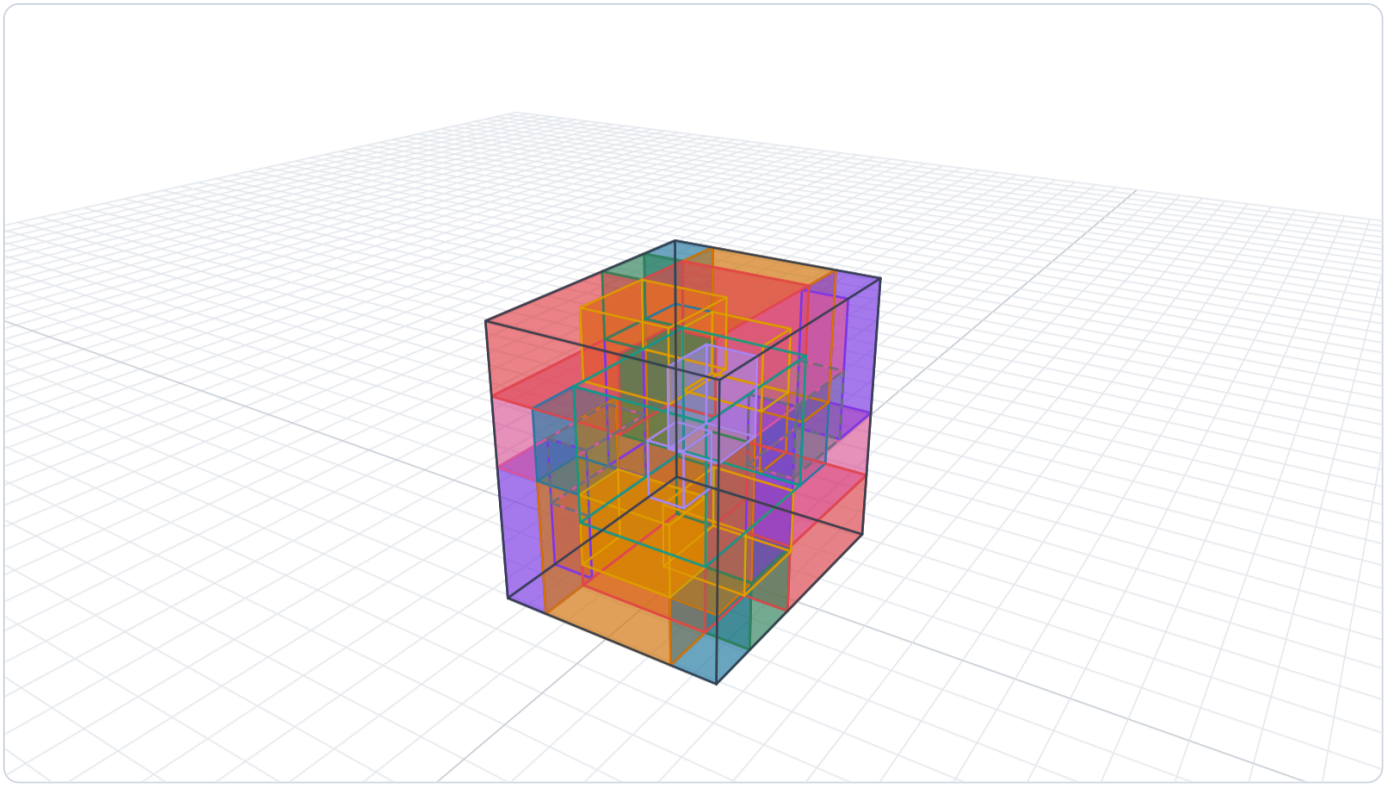


Ortoedros no nulos: **24** de 24 (6 tipos de 6). Σ = **35.17**, V = |det| = **26.17** (Σ > V).
Los ortoedros suman 4Σ: ✔
Contenedor = 24 ortoedros + 6 huecos + bloque central + 2 cubitos: ✔
Bloque central = Π(a+b−c): ✔
6 huecos + 2 cubitos = Π(−a+b+c) + Π(a−b+c): ✔

tipo	cada uno	ortoedros	total
$a_1 \cdot b_2 \cdot c_3$	6.75	4	27.00
$a_1 \cdot b_3 \cdot c_2$	5.40	4	21.60
$a_2 \cdot b_1 \cdot c_3$	7.88	4	31.50
$a_2 \cdot b_3 \cdot c_1$	5.25	4	21.00
$a_3 \cdot b_1 \cdot c_2$	5.40	4	21.60
$a_3 \cdot b_2 \cdot c_1$	4.50	4	18.00

Contenedor Π(a+b+c)	204.60
24 ortoedros (suma)	140.70
4Σ	140.70
6 huecos (con signo)	20.40
Bloque central Π(a+b−c)	39.90
2 cubitos $c_1 \cdot c_2 \cdot c_3$	3.60
Π(−a+b+c) + Π(a−b+c)	24.00
Suma: 24 + huecos + central + cubitos	204.60

Figura 5.3 — Con solapes P=(1, 3.5, 3), Q=(−3, 1.5, 1.5), R=(1, −1.2, 1.5)



Ortoedros no nulos: **24** de 24 (6 tipos de 6). Σ = **40.35**, V = |det| = **31.35** (Σ > V).

Los ortoedros suman 4Σ: ✔

Contenedor = 24 ortoedros + 6 huecos + bloque central + 2 cubitos: ✔

Bloque central = Π(a+b−c): ✔

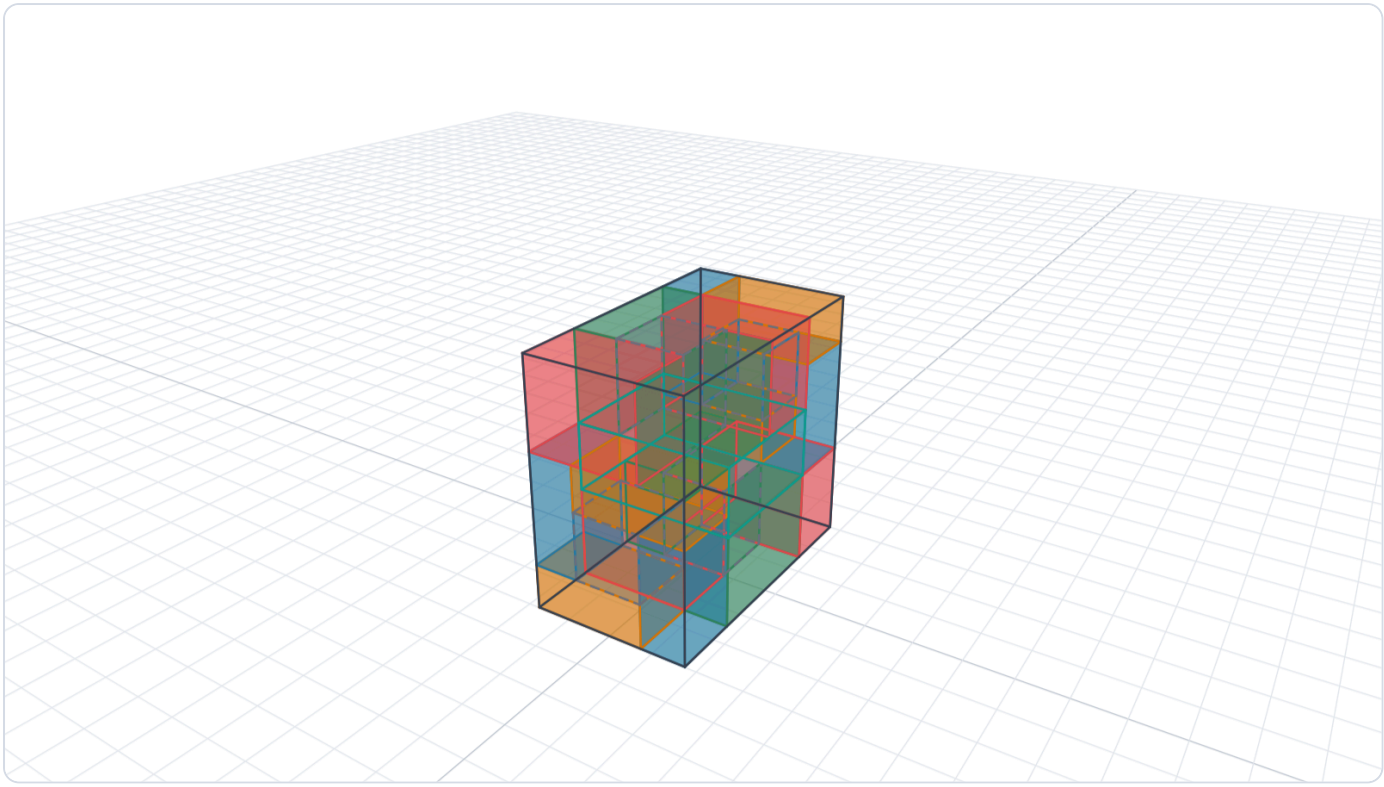
6 huecos + 2 cubitos = Π(−a+b+c) + Π(a−b+c): ✔

Algún hueco tiene signo negativo: esos ortoedros se solapan (zonas amarillas) y el hueco cuenta restando.

tipo	cada uno	ortoedros	total
$a_1 \cdot b_2 \cdot c_3$	2.25	4	9.00
$a_1 \cdot b_3 \cdot c_2$	1.80	4	7.20
$a_2 \cdot b_1 \cdot c_3$	15.75	4	63.00
$a_2 \cdot b_3 \cdot c_1$	5.25	4	21.00
$a_3 \cdot b_1 \cdot c_2$	10.80	4	43.20
$a_3 \cdot b_2 \cdot c_1$	4.50	4	18.00

Contenedor Π(a+b+c)	186.00
24 ortoedros (suma)	161.40
4Σ	161.40
6 huecos (con signo)	-13.20
Bloque central Π(a+b−c)	34.20
2 cubitos $c_1 \cdot c_2 \cdot c_3$	3.60
Π(−a+b+c) + Π(a−b+c)	-9.60
Suma: 24 + huecos + central + cubitos	186.00

Figura 5.4 — $r_1 = 0$ (16 ortoedros) P=(1, 1.5, 1), Q=(−2.5, 3, 2.5), R=(0, −1.5, 2)

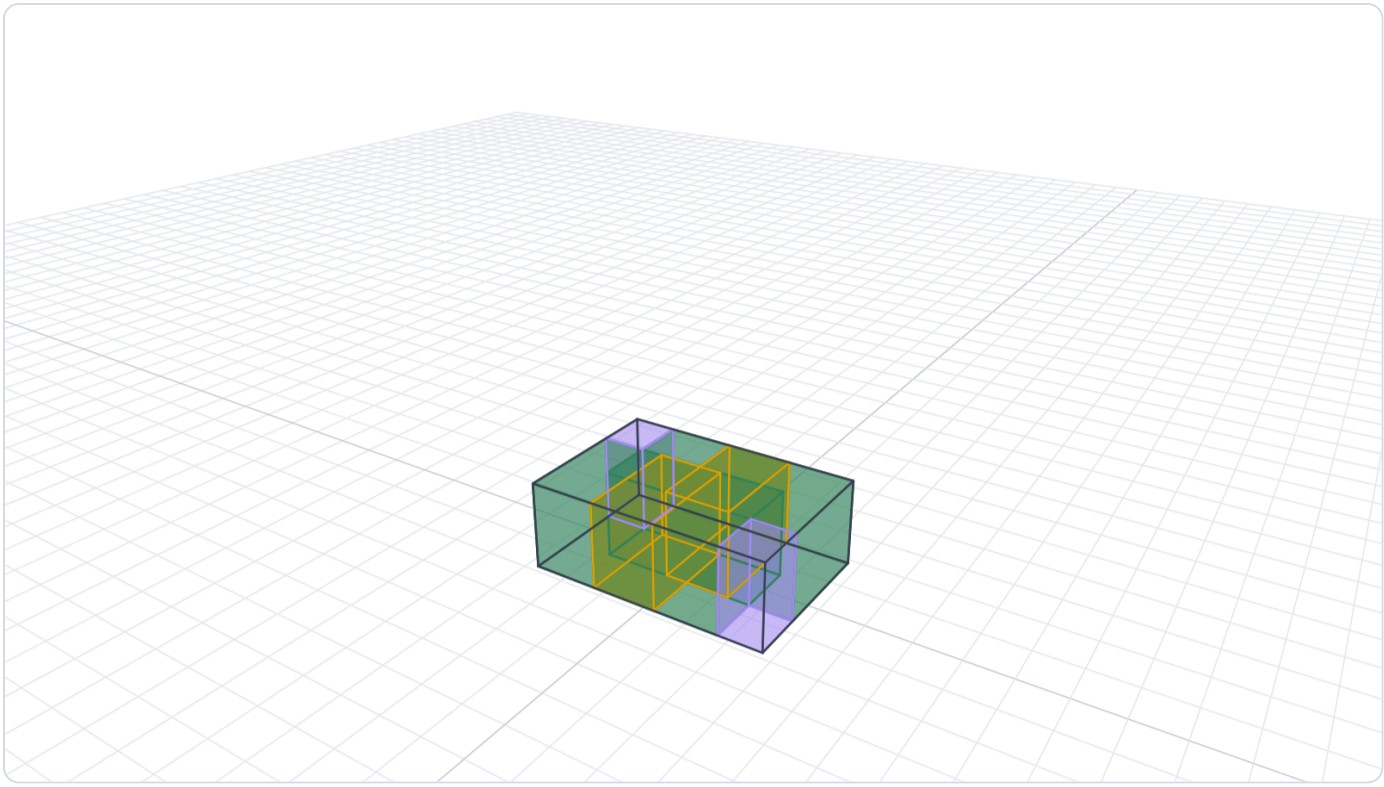


Ortoedros no nulos: **16** de 24 (4 tipos de 6). Σ = **21.00**, V = |det| = **21.00** (iguales).
Los ortoedros suman 4Σ: ✔
Contenedor = 24 ortoedros + 6 huecos + bloque central + 2 cubitos: ✔
Bloque central = Π(a+b−c): ✔
6 huecos + 2 cubitos = Π(−a+b+c) + Π(a−b+c): ✔

tipo	cada uno	ortoedros	total
$a_1 \cdot b_2 \cdot c_3$	6.00	4	24.00
$a_1 \cdot b_3 \cdot c_2$	3.75	4	15.00
$a_2 \cdot b_1 \cdot c_3$	7.50	4	30.00
$a_2 \cdot b_3 \cdot c_1$	0.00	0	0.00
$a_3 \cdot b_1 \cdot c_2$	3.75	4	15.00
$a_3 \cdot b_2 \cdot c_1$	0.00	0	0.00

Contenedor Π(a+b+c)	115.50
24 ortoedros (suma)	84.00
4Σ	84.00
6 huecos (con signo)	15.75
Bloque central Π(a+b−c)	15.75
2 cubitos $c_1 \cdot c_2 \cdot c_3$	0.00
Π(−a+b+c) + Π(a−b+c)	15.75
Suma: 24 + huecos + central + cubitos	115.50

Figura 5.5 — P=(p_1,0,0), Q=(q_1,q_2,0): 4 ortoedros P=(3, 0, 0), Q=(−1.5, 2.5, 0), R=(1, −1.2, 2)

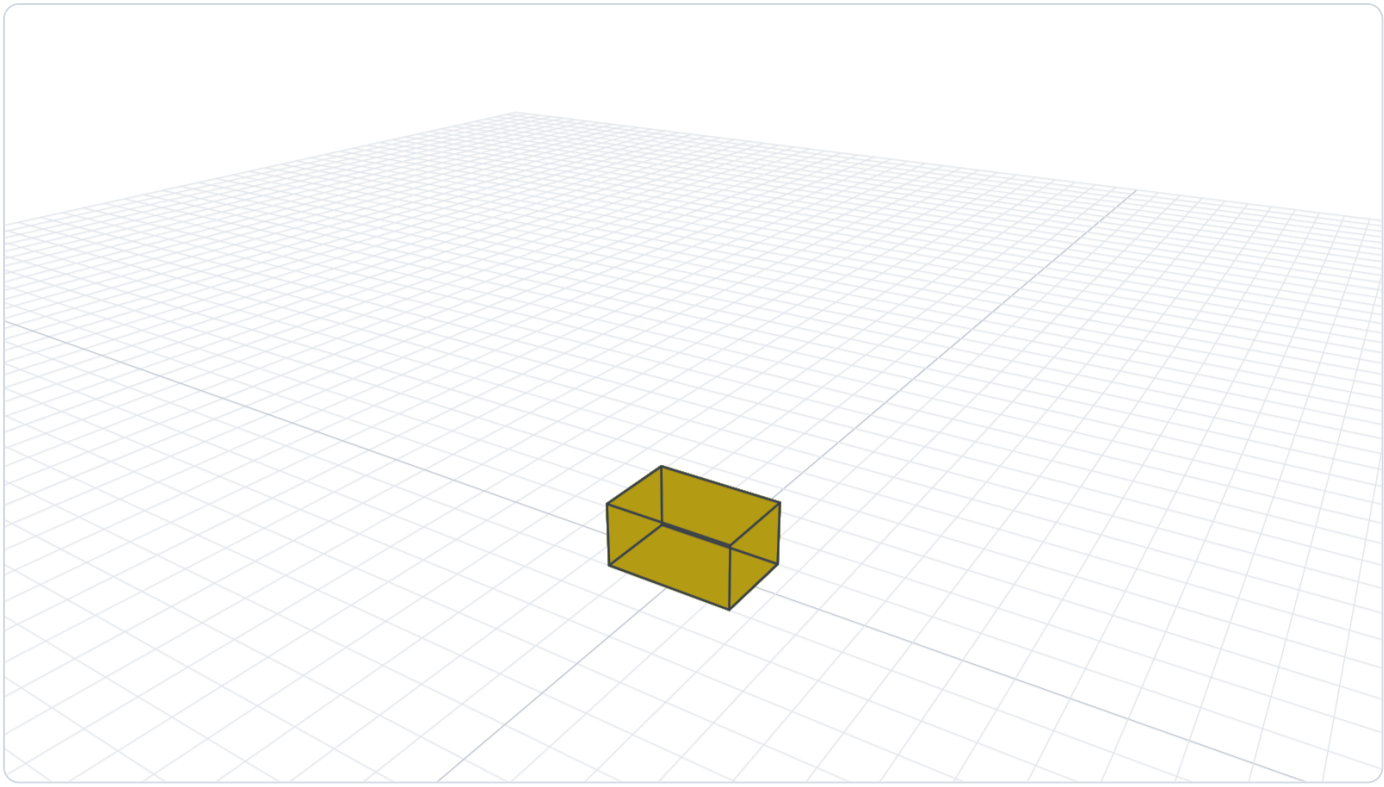


Ortoedros no nulos: **4** de 24 (1 tipos de 6). Σ = **15.00**, V = |det| = **15.00** (iguales).
Los ortoedros suman 4Σ: ✔
Contenedor = 24 ortoedros + 6 huecos + bloque central + 2 cubitos: ✔
Bloque central = Π(a+b−c): ✔
6 huecos + 2 cubitos = Π(−a+b+c) + Π(a−b+c): ✔
Algún hueco tiene signo negativo: esos ortoedros se solapan (zonas amarillas) y el hueco cuenta restando.
Alguna arista del bloque central es negativa (a+b < c en algún eje): las placas se solapan en el centro.

tipo	cada uno	ortoedros	total
$a_1 \cdot b_2 \cdot c_3$	15.00	4	60.00
$a_1 \cdot b_3 \cdot c_2$	0.00	0	0.00
$a_2 \cdot b_1 \cdot c_3$	0.00	0	0.00
$a_2 \cdot b_3 \cdot c_1$	0.00	0	0.00
$a_3 \cdot b_1 \cdot c_2$	0.00	0	0.00
$a_3 \cdot b_2 \cdot c_1$	0.00	0	0.00

Contenedor Π(a+b+c)	40.70
24 ortoedros (suma)	60.00
4Σ	60.00
6 huecos (con signo)	-15.00
Bloque central Π(a+b−c)	-9.10
2 cubitos $c_1 \cdot c_2 \cdot c_3$	4.80
Π(−a+b+c) + Π(a−b+c)	-10.20
Suma: 24 + huecos + central + cubitos	40.70

Figura 5.6 — Ortoedro recto P=(3, 0, 0), Q=(0, 2, 0), R=(0, 0, 1.5)



Ortoedros no nulos: **4** de 24 (1 tipos de 6). Σ = **9.00**, V = |det| = **9.00** (iguales).

Los ortoedros suman 4Σ: ✔

Contenedor = 24 ortoedros + 6 huecos + bloque central + 2 cubitos: ✔

Bloque central = Π(a+b−c): ✔

6 huecos + 2 cubitos = Π(−a+b+c) + Π(a−b+c): ✔

Algún hueco tiene signo negativo: esos ortoedros se solapan (zonas amarillas) y el hueco cuenta restando.

Alguna arista del bloque central es negativa (a+b < c en algún eje): las placas se solapan en el centro.

tipo	cada uno	ortoedros	total
$a_1 \cdot b_2 \cdot c_3$	9.00	4	36.00
$a_1 \cdot b_3 \cdot c_2$	0.00	0	0.00
$a_2 \cdot b_1 \cdot c_3$	0.00	0	0.00
$a_2 \cdot b_3 \cdot c_1$	0.00	0	0.00
$a_3 \cdot b_1 \cdot c_2$	0.00	0	0.00
$a_3 \cdot b_2 \cdot c_1$	0.00	0	0.00

Contenedor Π(a+b+c)	9.00
24 ortoedros (suma)	36.00
4Σ	36.00
6 huecos (con signo)	-18.00
Bloque central Π(a+b−c)	-9.00
2 cubitos $c_1 \cdot c_2 \cdot c_3$	0.00
Π(−a+b+c) + Π(a−b+c)	-18.00
Suma: 24 + huecos + central + cubitos	9.00

6. Casos para probar

A. El marco adaptado

Con cualquiera de los seis marcos base y sin giros adicionales, $\Sigma = V$ para cualquier paralelepípedo. Es la construcción de la sección 2.

Ver la figura 4.1 (y la 4.2 con otro marco base).

B. Un giro cualquiera

Con el paralelepípedo genérico, giramos el sistema $(\psi, \theta, \varphi) = (25°, 35°, 20°)$ a partir del marco base: aparecen coordenadas no nulas por todas partes y $\Sigma \approx 31{,}04 > V \approx 28{,}19$.

Ver la figura 4.3.

C. Ejes en posición aleatoria

Un sistema al azar tiene las nueve coordenadas no nulas, y entonces la igualdad es imposible.

Ver la figura 4.3 y la gráfica 4.12 (ejes al azar).

D. Buscar el mínimo

Un buscador numérico recorre sistemas de ejes y se queda con el de menor Σ. Se acerca a $\Sigma = V$, y el sistema que encuentra tiene coordenadas casi nulas.

Ver las gráficas 4.9 a 4.11.

E. Ortoedro recto

Si P, Q y R son perpendiculares, el marco base coincide con los lados y $\Sigma = V$. Girar los ejes alrededor de uno solo (o de dos seguidos, como y y x) conserva la igualdad en este ejemplo; combinando los tres giros, por ejemplo $(25°, 35°, 20°)$, sale $\Sigma \approx 9{,}19 > V = 9$.

Ver las figuras 4.5 y 4.6.

F. Paralelepípedo plano (V = 0)

Si R está en el plano de P y Q, $V = 0$; en el marco adaptado sale $\Sigma = 0$. Fuera de ese marco, $\Sigma > 0 = V$.

Ver las figuras 4.7 y 4.8.

7. Resumen

- V no depende de los ejes; $\Sigma = \Sigma_\sigma |p_{\sigma(1)}\, q_{\sigma(2)}\, r_{\sigma(3)}|$ sí. Siempre $\Sigma \geq V$, con $\Sigma - V = 2 \cdot \text{mín}(T_+, T_-)$.
- **Sí existe** un sistema de ejes ortonormales con $\Sigma = V$ para cualquier paralelepípedo: x sobre P, plano xy conteniendo a Q (marco QR). Hay seis, según el orden de los vectores.
- No ocurre en todos los sistemas. Con las nueve coordenadas no nulas es imposible; hace falta al menos un cero y que los términos no nulos tengan el mismo signo. Los ejes que cumplen eso son una familia delgada: un giro pequeño cualquiera suele romper la igualdad.
- 4Σ es la suma de hasta 24 ortoedros (4 copias de cada uno de los seis tipos $a_{\sigma(1)} \times b_{\sigma(2)} \times c_{\sigma(3)}$), que caben en el contenedor junto a seis huecos con signo, un bloque central $\Pi(a+b-c)$ y dos cubitos $c_1 \times c_2 \times c_3$. En el marco adaptado $P=(p_1,0,0)$, $Q=(q_1,q_2,0)$ solo sobrevive uno de los seis tipos (4 ortoedros).

- Cuando se da la igualdad, $4V = \Pi(a+b+c) - \Pi(-a+b+c) - \Pi(a-b+c) - \Pi(a+b-c)$ con a_i, b_i, c_i los valores absolutos de las coordenadas.