3

Probabilidad condicional e independencia

3.1 Probabilidad condicional

Consideremos de nuevo la diferencia que existe entre elegir al azar un artículo de un lote con o sin sustitución. En el ejemplo 2.4, el lote tenía la siguiente composición: 80 artículos sin defectos y 20 defectuosos. Supóngase que elegimos dos artículos: *a*) con sustitución y *b*) sin sustitución.

Definamos los eventos siguientes:

$$A = \{\text{el primer artículo es defectuoso}\},$$

$$B = \{\text{el segundo artículo es defectuoso}\}.$$

Si escogemos *con* sustitución, $P(A) = P(B) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$. Cada vez que elegimos, en el lote hay 20 artículos defectuosos de un total de 100. Sin embargo, si elegimos *sin* sustitución, los resultados no son totalmente inmediatos. Todavía es verdad, por supuesto, que $P(A) = \frac{1}{5}$. Pero, ¿cuál es el valor de $P(B)$? Es evidente que con el propósito de calcular $P(B)$ deberíamos conocer la composición del lote *cuando se escoge el* *segundo artículo*. En otras palabras, deberíamos saber si el evento A ocurrió o no. Este ejemplo indica la necesidad de presentar el siguiente concepto importante.

Sean A y B dos eventos asociados con un experimento ε. Indiquemos con $P(B \mid A)$ la *probabilidad condicional* del evento B, *dado* que A ha ocurrido.

En el ejemplo anterior, $P(B \mid A) = \frac{19}{99}$. Porque si A ha ocurrido, entonces, al sacar por segunda vez, sólo quedan 99 artículos, de los cuales 19 son defectuosos.

Cada vez que calculamos $P(B \mid A)$, esencialmente estamos calculando $P(B)$ respecto al *espacio muestral reducido* A, en vez de espacio muestral original S. Consideremos el diagrama de Venn de la figura 3.1.

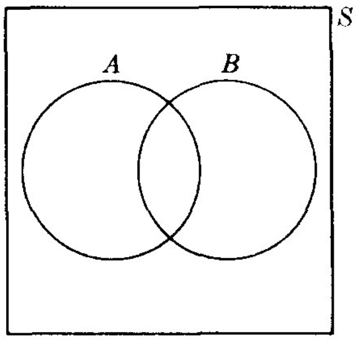


FIGURA 3.1

Cuando calculamos $P(B)$ nos preguntamos qué tan probable es que estemos en B, sabiendo que debemos estar en S, y cuando evaluamos $P(B \mid A)$ nos preguntamos qué tan probable es que estemos en B, sabiendo que debemos estar en A. (Esto es, el espacio muestral se ha *reducido* de S a A.)

Pronto daremos una definición formal de $P(B \mid A)$. Por el momento, sin embargo, seguiremos con nuestra noción intuitiva de probabilidad condicional y consideraremos un ejemplo:

EJEMPLO 3.1. Se lanzan dos dados normales y se anotan los resultados (x_1, x_2), donde x_i es el resultado del i-ésimo dado, $i = 1, 2$. Por tanto, el espacio muestral S se puede representar por el siguiente arreglo de 36 resultados igualmente posibles:

$$S = \left\{ \begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & \ldots & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & \ldots & (2,6) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ (6,1) & (6,2) & \ldots & (6,6) \end{array} \right\}.$$

Consideremos los dos eventos siguientes:

$$A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 10\}, \quad B = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > x_2\}.$$

Así $A = \{(5,5),(4,6),(6,4)\}$ y $B = \{(2,1),(3,1),(3,2),\ldots,(6,5)\}$. Por tanto, $P(A) = \frac{3}{36}$ y $P(B) = \frac{15}{36}$. Además, $P(B \mid A) = \frac{1}{3}$, ya que el espacio muestral es ahora A (que son tres resultados), y sólo uno de ellos es consistente con el evento B. De manera semejante, podemos calcular $P(A \mid B) = \frac{1}{15}$.

Finalmente, calculemos $P(A \cap B)$. El evento $(A \cap B)$ ocurre si y sólo si la suma de los dos dados es diez y el primer dado indica un valor mayor que el segundo. Solamente hay *un* resultado y, por tanto, $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$. Si observamos con cuidado los diversos números que antes hemos calculado, concluimos que se cumple lo siguiente:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{y} \quad P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Sucede que esas relaciones no sólo aparecen en los ejemplos particulares que hemos considerado, sino que son completamente generales y nos dan un medio de *definir formalmente* la probabilidad condicional.

Para justificar esta definición, volvamos al concepto de frecuencia relativa. Supongamos que un experimento ε se ha repetido n veces. Sean n_A, n_B, y $n_{A\cap B}$ el número respectivo de veces que los eventos A, B y $A \cap B$ han ocurrido en las n repeticiones. ¿Cuál es el significado de $n_{A\cap B}/n_A$? Representa la frecuencia relativa de B entre esos resultados en los que A ocurrió. Esto es, $n_{A\cap B}/n_A$ es la frecuencia relativa condicional de B, dado que A ocurrió.

Podemos escribir $n_{A\cap B}/n_A$ como sigue:

$$\frac{n_{A\cap B}}{n_A} = \frac{n_{A\cap B}/n}{n_A/n} = \frac{f_{A\cap B}}{f_A}$$

donde $f_{A\cap B}$ y f_A son las frecuencias relativas de los eventos $A \cap B$ y A, respectivamente. Como ya hemos indicado (y demostraremos más adelante), si n, el número de repeticiones es grande, $f_{A\cap B}$ estará cercana a $P(A \cap B)$ y f_A estará cercana a $P(A)$. Por lo tanto, la relación anterior sugiere que $n_{A\cap B}/n_A$ estará cercana a $P(B \mid A)$. Así, hacemos la siguiente definición formal:

Definición.

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad \text{dado que} \quad P(A) > 0. \tag{3.1}$$

Observaciones: a) Es importante darse cuenta de que lo anterior no es un teorema (no demostramos nada), ni un axioma. Simplemente presentamos la noción intuitiva de probabilidad condicional y luego hicimos la definición formal de lo que entendemos por esta noción. El hecho de que nuestra definición formal corresponda a nuestra noción intuitiva está comprobado por el párrafo que precede a la definición.

b) Es muy sencillo comprobar que $P(B \mid A)$ para un valor de A fijo satisface los diversos postulados de la probabilidad, ecuación (1.3). (Véase el Prob. 3.22.) Esto es, tenemos:

1′) $0 \le P(B \mid A) \le 1$,
2′) $P(S \mid A) = 1$,
3′) $P(B_1 \cup B_2 \mid A) = P(B_1 \mid A) + P(B_2 \mid A)$ si $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, (3.2)
4′) $P(B_1 \cup B_2 \cup \cdots \mid A) = P(B_1 \mid A) + P(B_2 \mid A) + \cdots$ si $B_i \cap B_j = \emptyset$ para $i \neq j$.

c) Si $A = S, P(B \mid S) = P(B \cap S)/P(S) = P(B)$.

d) Con cada evento $B \subset S$ podemos asociar dos números, $P(B)$, la probabilidad (no condicional) de B y $P(B \mid A)$, la probabilidad condicional de B, dado que algún evento A (para el cual $P(A) > 0$) ha ocurrido. En general, esas dos medidas de probabilidad asignarán probabilidades distintas al evento B, como se indicó en los ejemplos precedentes. En breve estudiaremos un importante caso especial, en el cual $P(B)$ y $P(B \mid A)$ son la misma.

e) Nótese que la probabilidad condicional está definida en términos de la medida de probabilidad no condicional P. Esto es, si conocemos $P(B)$ para cada $B \subset S$ podemos calcular $P(B \mid A)$ para cada $B \subset S$.

Así tenemos dos maneras de calcular la probabilidad condicional $P(B \mid A)$:

a) En forma directa considerando la probabilidad de B respecto al espacio muestral reducido A.

b) Usando la definición anterior, donde $P(A \cap B)$ y $P(A)$ se calculan respecto al espacio muestral original S.

Observación: Si $A = S$, obtenemos $P(B \mid S) = P(B \cap S)/P(S) = P(B)$, puesto que $P(S) = 1$ y $B \cap S = B$. Así debe ser, porque decir que S ha ocurrido, sólo indica que el experimento se ha realizado.

EJEMPLO 3.2. Supóngase que en una oficina hay 100 máquinas calculadoras. Algunas de esas máquinas son eléctricas (E), mientras que otras son manuales (M). Además, algunas son nuevas (N), mientras las otras son usadas (U). La tabla 3.1 da el número de máquinas de cada categoría. Una persona entra en la oficina, escoge una máquina al azar y descubre que es nueva. ¿Cuál es la probabilidad de que sea eléctrica? En términos de la notación presentada deseamos calcular $P(E \mid N)$.

TABLA 3.1

	E	M	
N	40	30	70
U	20	10	30
	60	40	100

Sólo considerando el espacio muestral reducido N (es decir, las 70 máquinas nuevas), tenemos que: $P(E \mid N) = \frac{40}{70} = \frac{4}{7}$. Usando la definición de probabilidad condicional, tenemos que:

$$P(E \mid N) = \frac{P(E \cap N)}{P(N)} = \frac{40/100}{70/100} = \frac{4}{7}$$

La consecuencia más importante de la definición de probabilidad condicional anterior se obtiene escribiéndola de la manera siguiente:

$$P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A)$$

lo que equivale a (3.3a)

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B).$$

Esto también se conoce como el *teorema de multiplicación* de probabilidades.

Podemos aplicar este teorema al cálculo de la probabilidad de la ocurrencia simultánea de los dos eventos A y B.

EJEMPLO 3.3. Consideremos otra vez el lote analizado al principio de la sección 3.1, el cual consta de 20 artículos defectuosos y 80 sin defectos. Si escogemos 2 artículos al azar, sin sustitución, ¿cuál es la probabilidad de que ambos artículos sean defectuosos?

Como antes, definimos los eventos A y B como sigue:

$$A = \{\text{el primer artículo es defectuoso}\},$$

$$B = \{\text{el segundo artículo es defectuoso}\}.$$

Por lo tanto, necesitamos $P(A \cap B)$, que puede calcularse de acuerdo con la fórmula anterior, como $P(B \mid A)P(A)$. Pero $P(B \mid A) = \frac{19}{99}$, mientras que $P(A) = \frac{1}{5}$. Por lo tanto,

$$P(A \cap B) = \frac{19}{495}.$$

Observación: El anterior teorema de la multiplicación (3.3a) se puede generalizar a más de dos eventos de la siguiente manera:

$$P[A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n] = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1, A_2) \cdots P(A_n \mid A_1, \ldots, A_{n-1}) \tag{3.3b}$$

Por un momento considérese si podemos hacer una afirmación general de la magnitud relativa de $P(A \mid B)$ y $P(A)$. Consideremos los cuatro casos ilustrados con los diagramas de Venn en la figura 3.2. Tenemos:

a) $P(A \mid B) = 0 \leq P(A)$, puesto que A no puede ocurrir si B ha ocurrido.

b) $P(A \mid B) = P(A \cap B)/(P(B) = [P(A)/P(B)] \geq P(A)$, puesto que $0 \leq P(B) \leq 1$.

c) $P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B) = P(B)/P(B) = 1 \geq P(A)$.

d) En este caso no podemos hacer ninguna afirmación acerca de la magnitud relativa de $P(A \mid B)$ y $P(A)$.

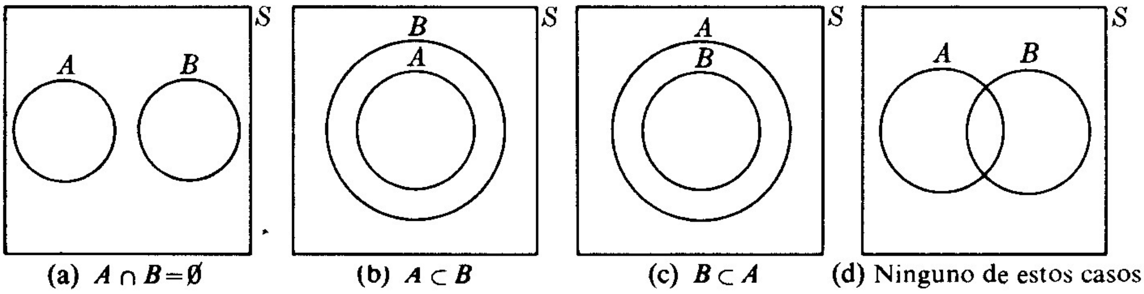


FIGURA 3.2

Nótese que dos de los casos anteriores, $P(A) \leq P(A \mid B)$, en un caso, $P(A) \geq P(A \mid B)$ y en el cuarto caso no podemos hacer ninguna clase de comparaciones.

Anteriormente usamos el concepto de probabilidad condicional con el fin de evaluar la probabilidad de la ocurrencia simultánea de los dos eventos. Para calcular la probabilidad de un solo evento A, podemos aplicar este concepto de otra manera. Necesitamos la siguiente definición.

Definición. Decimos que los eventos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ representan una *partición* del espacio muestral S si:

a) $B_i \cap B_j = \emptyset$ para toda $i \neq j$.

b) $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = S$.

c) $P(B_i) > 0$ para toda i.

En otras palabras, cuando se efectúa el experimento ε, ocurre *uno* y *sólo* uno de los eventos B_i.

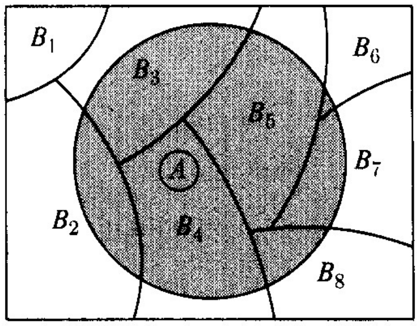


FIGURA 3.3

(Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado $B_1 = \{1,2\}$, $B_2 = \{3,4,5\}$ y $B_3 = \{6\}$ representarían una partición del espacio muestral, mientras que $C_1 = \{1,2,3,4\}$ y $C_2 = \{4,5,6\}$ no lo harían.)

Sea A algún evento respecto a S y sea $B_1, B_2, \ldots, B_k$ una partición de S.

El diagrama de Venn de la figura 3.3 ilustra esto para $k = 8$. Por tanto, podemos escribir

$$A = A \cap B_1 \cup A \cap B_2 \cup \cdots \cup A \cap B_k.$$

Por supuesto algunos de los conjuntos $A \cap B_j$ pueden ser vacíos, pero esto no invalida la anterior descomposición de A. Lo importante es que todos los eventos $A \cap B_1, \ldots, A \cap B_k$ son parejas mutuamente excluyentes. Por lo tanto, podemos aplicar la propiedad aditiva para este tipo de eventos (Ec. 1.3) y escribir:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_k).$$

Sin embargo, cada término $P(A \cap B_j)$ se puede expresar como $P(A \mid B_j)P(B_j)$ y, por lo tanto, obtenemos el llamado teorema de la *probabilidad total:*

$$P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + \cdots + P(A \mid B_k)P(B_k). \quad (3.4)$$

Este resultado representa una relación muy útil, ya que cuando se busca $P(A)$ frecuentemente puede ser difícil calcularlo de manera directa. Sin embargo, con la información adicional de que B_j ha ocurrido, podemos calcular $P(A \mid B_j)$ y entonces usar la fórmula anterior.

EJEMPLO 3.4. Consideremos (por última vez) el lote de 20 artículos defectuosos y 80 sin defectos, de los cuales escogemos dos artículos sin sustitución. Nuevamente definimos A y B:

$$A = \{\text{el primer artículo elegido es defectuoso}\},$$

$$B = \{\text{el segundo artículo elegido es defectuoso}\}.$$

ahora podemos calcular $P(B)$ como sigue:

$$P(B) = P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A^c)P(A^c).$$

Usando uno de los cálculos ya hechos en el ejemplo 3.3, encontramos que

$$P(B) = \tfrac{19}{99} \cdot \tfrac{1}{5} + \tfrac{22}{99} \cdot \tfrac{4}{5} = \tfrac{1}{5}.$$

Este resultado puede ser un poco sorprendente, particularmente si el lector recuerda que al comienzo de la sección 3.1 encontramos que $P(B) = \frac{1}{5}$ cuando escogemos los artículos *con* sustitución.

EJEMPLO 3.5. Cierto artículo se manufactura en tres fábricas, digamos 1, 2 y 3. Se sabe que la primera produce el doble de artículos que la segunda y que ésta y la tercera producen el mismo número de artículos (durante un periodo de producción especificado). Se sabe también que el 2% de los artículos producidos por las dos primeras es defectuoso, mientras que el 4% de los manufacturados por la tercera es defectuoso. Todos los artículos producidos se colocan en una fila y se escoge uno al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que este artículo sea defectuoso?

Definamos los siguientes eventos:

$$A = \{\text{el artículo es defectuoso}\}, \qquad B_1 = \{\text{el artículo proviene de 1}\},$$

$$B_2 = \{\text{el artículo proviene de 2}\}, \qquad B_3 = \{\text{el artículo proviene de 3}\}.$$

Nosotros necesitamos $P(A)$ y, usando el resultado anterior, podemos escribir:

$$P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + P(A \mid B_3)P(B_3).$$

Ahora $P(B_1) = \frac{1}{2}$, mientras que $P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{4}$. También $P(A \mid B_1) = P(A \mid B_2) = 0.02$, mientras que $P(A \mid B_3) = 0.04$. Poniendo sus valores en la expresión anterior obtenemos $P(A) = 0.025$.

Observación: Con el teorema de la probabilidad total, en química se ha observado la siguiente analogía. Supóngase que k matraces que contienen diferentes soluciones de la misma sal hacen un litro. Sea $P(B_i)$ el volumen del i-ésimo matraz y $P(A \mid B_i)$ la concentración de la solución en el i-ésimo matraz. Si combinamos todas las soluciones en un matraz y suponemos que $P(A)$ indica la concentración de la solución resultante, obtenemos:

$$P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + \cdots + P(A \mid B_k)P(B_k).$$

3.2 Teorema de Bayes

Podemos usar el ejemplo 3.5 para demostrar otro resultado importante. Supongamos que del depósito se escoge un artículo y se encuentra que es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que se produjese en la primera fábrica?

Usando la notación antes presentada, necesitamos $P(B_1 \mid A)$. Podemos calcular esta probabilidad como una consecuencia de la siguiente. Sean $B_1, \ldots, B_k$ una partición del espacio muestral S y A un evento asociado con S. Aplicando la definición de probabilidad condicional, podemos escribir:

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\Sigma_{j=1}^{k} P(A \mid B_j)P(B_j)} \qquad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{3.5}$$

Este resultado se conoce como *teorema de Bayes*. También se le llama fórmula para la probabilidad de las "causas". Puesto que las B_i son una partición del espacio muestral, uno y sólo uno de los eventos B_i ocurre. (Esto es, *uno* de los eventos B_i debe ocurrir y solamente uno.) Por lo tanto, la fórmula anterior nos da la probabilidad de un B_i particular (esto es, una "causa"), dado que el evento A *ha* ocurrido. Para aplicar este teorema debemos conocer los valores de las $P(Bi)$. Muy a menudo esos valores no son conocidos y esto limita la aplicabilidad del resultado.

Ha existido una considerable controversia acerca del teorema de Bayes, el cual en términos matemáticos es perfectamente correcto, sólo la elección impropia para $P(B_i)$ hace objetable el resultado.

Volviendo a la pregunta propuesta anteriormente y aplicando ahora la ecuación (3.5), obtenemos:

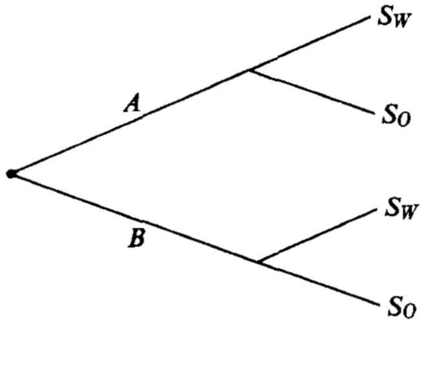
$$P(B_1 \mid A) = \frac{(0.02)(1/2)}{(0.02)(1/2) + (0.02)(1/4) + (0.04)(1/4)} = 0.40.$$

Observación: Otra vez podemos encontrar en química una analogía con el teorema de Bayes. En k matraces tenemos soluciones de la misma sal, pero en concentraciones diferentes. Supongamos que el volumen total de la solución es un litro. Indicando el volumen de la solución en el i-ésimo matraz con $P(B_i)$ y la concentración de la sal en ese mismo matraz con $P(A \mid B_i)$, encontramos que la ecuación (3.5) da la proporción de la cantidad completa de sal encontrada en el i-ésimo matraz.

La siguiente ilustración del teorema de Bayes nos dará la oportunidad de introducir la idea de *diagrama de árbol*, método muy útil para analizar ciertos problemas.

Supóngase que varias cajas de caramelos son de dos tipos, digamos A y B. El tipo A contiene 70% de caramelos dulces y 30% de caramelos ácidos, mientras que en el tipo B dichos porcentajes están invertidos. Aún más, supóngase que el 60% de todas las cajas de caramelos son del tipo A, mientras que el resto son del tipo B.

Ahora estamos ante el siguiente problema de decisión. Usted recibe una caja de dulces de tipo desconocido. Se le permite sacar una muestra de caramelo (una situación ciertamente no real, pero que nos permite presentar las ideas importantes sin mucha complicación y con esta información debe decir si cree que se le ha sido ofrecido el tipo A o el tipo B. El siguiente "diagrama de árbol" (llamado así por las diversas trayectorias o ramas que aparecen) nos ayudará a analizar el problema. (S_W y S_O indican la elección de un caramelo dulce o ácido, respectivamente.)



Hagamos unos cuantos cálculos:

$$P(A) = 0.6; \; P(B) = 0.4; \; P(S_W \mid A) = 0.7;$$

$$P(S_O \mid A) = 0.3; \; P(S_W \mid B) = 0.3; \; P(S_O \mid B) = 0.7.$$

Lo que en realidad deseamos saber es $P(A \mid S_W)$, $P(A \mid S_O)$, $P(B \mid S_W)$ y $P(B \mid S_O)$. Esto es, suponiendo que realmente escogimos un caramelo dulce, ¿qué decisión estaríamos más inclinados a hacer? Comparemos $P(A \mid S_W)$ y $P(B \mid S_W)$. Utilizando la fórmula de Bayes tenemos

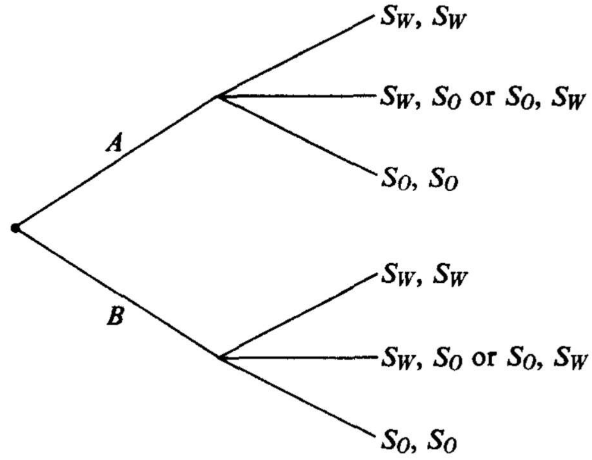
$$\begin{aligned} P(A \mid S_W) &= \frac{P(S_W \mid A)P(A)}{P(S_W \mid A)P(A) + P(S_W \mid B)P(B)} \\ &= \frac{(0.7)(0.6)}{(0.7)(0.6) + (0.3)(0.4)} = \frac{7}{9}. \end{aligned}$$

Un cálculo similar nos da $P(B \mid S_W) = 2/9$.

Así, con base en la evidencia que tenemos (es decir, la obtención de un caramelo dulce) es $3\frac{1}{2}$ veces más probable que se trate de una caja del tipo A que del tipo B. Por lo tanto, decidiríamos, posiblemente, que el caramelo se obtuvo de una caja tipo A. (Por supuesto, podríamos estar equivocados. Lo interesante del análisis anterior es que elegimos la alternativa que parece más probable con base en los pocos datos que tenemos.)

En términos del diagrama de árbol, lo que realmente necesitábamos (e hicimos) en los cálculos precedentes fue un análisis "hacia atrás". Esto es, dado lo que observamos, en este caso S_W, ¿qué tan probable era escoger el tipo A?

Una situación más interesante aparece si se nos permite elegir *dos* caramelos antes de decidir si es escogido el tipo A o el tipo B. En este caso, el diagrama de árbol aparecerá como sigue.



En el problema 3.26 se le pide a usted decidir de cuál de los dos tipos, A o B, está tomando muestras, según los tres resultados experimentales posibles que observa.

3.3 Eventos independientes

Hemos considerado dos eventos A y B que no pueden ocurrir de manera simultánea, esto es $A \cap B = \emptyset$. Tales eventos se designaron mutuamente excluyentes. Antes indicamos que si A y B son mutuamente excluyentes, entonces $P(A \mid B) = 0$, porque la ocurrencia de B impide la ocurrencia de A. Por otra parte, tenemos el caso, ya discutido anteriormente, en que $B \supset A$ y, por lo tanto, $P(B \mid A) = 1$.

En cada uno de los casos anteriores, sabiendo que B ocurrió, se nos dio una información precisa sobre la probabilidad de la ocurrencia de A. Sin embargo, hay muchos casos en los cuales se sabe que si un evento B ocurre, no tiene influencia alguna en la ocurrencia o no ocurrencia de A.

EJEMPLO 3.6. Supongamos que un dado normal se lanza dos veces. Definiremos los eventos A y B como sigue:

$$A = \{\text{el primer dado muestra un número par}\},$$

$$B = \{\text{el segundo dado muestra un 5 o un 6}\}.$$

Por intuición sabemos que los eventos A y B no están relacionados. Saber que B ocurre no proporciona información acerca de la ocurrencia de A. De hecho, el siguiente cálculo lo pone de manifiesto. Tomando como nuestro espacio muestral los 36 resultados igualmente posibles del ejemplo 3.1, encontraremos que $P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$, mientras que $P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Por lo tanto,

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{(\frac{1}{6})}{(\frac{1}{3})} = \frac{1}{2}.$$

Así encontramos, como era de suponer, que la probabilidad no condicional es igual a la probabilidad condicional $P(A \mid B)$. De modo semejante

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{(\frac{1}{6})}{(\frac{1}{2})} = \frac{1}{3} = P(B).$$

Por lo tanto, podríamos inclinarnos a decir que A y B son independientes si y sólo si $P(B \mid A) = P(A)$ y $P(B \mid A) = P(B)$. Aunque esto sería esencialmente apropiado, hay otro método que evita la dificultad encontrada aquí, a saber, que ambos, $P(A)$ y $P(B)$, deben ser diferentes de cero antes de que las igualdades anteriores sean significativas.

Consideremos $P(A \cap B)$, suponiendo que las probabilidades condicionales anteriores sean iguales a las probabilidades no condicionales correspondientes. Tenemos

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) = P(A)P(B),$$
$$P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A) = P(B)P(A).$$

Así encontramos que, como ni $P(A)$ ni P(B) son iguales a cero, las probabilidades no condicionales son iguales a las probabilidades condicionales si y sólo si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Aquí hacemos la siguiente definición formal. [Si $P(A)$ o $P(B)$ es igual a cero, esta definición es aún válida.]

Definición. A y B son *eventos independientes* si y sólo si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \tag{3.6}$$

Observación: Esta definición es esencialmente equivalente a la que antes se sugirió, es decir, que A y B son independientes si $P(B \mid A) = P(B)$ y $P(A \mid B) = P(A)$. Esta última forma es un poco más intuitiva, porque afirma precisamente lo que hemos estado tratando de decir antes: A y B son independientes si el conocimiento de la ocurrencia de A no influye de modo alguno en la probabilidad de la ocurrencia de B.

Que la definición formal adoptada también tiene cierto carácter intuitivo, puede verse al considerar el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.7. Veamos otra vez el ejemplo 3.2. Consideremos primero la tabla siguiente sólo con los valores marginales dados.

	E	M	
N			70
U			30
	60	40	100

Esto es, hay 60 máquinas eléctricas y 40 manuales. Del total, 70 son nuevas, mientras que 30 son usadas. Hay diversas maneras de colocar los datos en la tabla, consistentemente con los totales marginales dados. A continuación anotamos algunas de esas posibilidades.

	E	M	
N	60	10	70
U	0	30	30
	60	40	100

(a)

	E	M	
N	30	40	70
U	30	0	30
	60	40	100

(b)

	E	M	
N	42	28	70
U	18	12	30
	60	40	100

(c)

Consideremos la tabla *a*). Aquí *todas* las máquinas eléctricas son nuevas, y *todas* las usadas son manuales. Así hay una relación obvia (no necesariamente causal) entre las características de ser eléctricas y ser nuevas. De igual manera, en la tabla *b*) *todas* las máquinas manuales son nuevas y *todas* las usadas son eléctricas. Otra vez parece existir una relación definida entre esas características. Sin embargo, cuando observamos la tabla *c*), el panorama es muy diferente. Aquí no existe una relación aparente. Por ejemplo, el 60% de todas las máquinas son eléctricas. De modo semejante, el 70% de todas las máquinas son nuevas, y exactamente el 70% de las máquinas manuales son nuevas, etc. Así, no es evidente que las características de "ser nuevas" y "ser eléctricas" tengan alguna relación entre sí. Por supuesto, esta tabla se construyó precisamente de modo que exhiba esta propiedad. ¿Cómo se obtuvieron los datos de esta tabla? Simplemente aplicando la ecuación (3.6); es decir, como $P(E) = \frac{60}{100}$ y $P(N) = \frac{70}{100}$ debemos tener, por independencia, $P(E \cap N) = P(E)P(N) = \frac{42}{100}$. Por lo tanto, la colocación del dato en la tabla que indica el número de máquinas eléctricas nuevas está dada por el número 42. Las otras ubicaciones se obtuvieron de un modo semejante.

En la mayor parte de las aplicaciones *supondremos* la independencia de los dos eventos A y B, y luego usaremos esta suposición para calcular $P(A \cap B)$, como $P(A)P(B)$. En general, las condiciones físicas en las cuales se realiza el experimento harán posible determinar si tal suposición se justifica o si al menos lo hace aproximadamente.

EJEMPLO 3.8. Consideremos un lote grande de artículos, digamos 10 000. Supongamos que el 10% de estos artículos es defectuoso y el 90% no. Se escogen dos artículos. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos no sean defectuosos?

Definamos los eventos A y B así:

$$A = \{\text{primer artículo no es defectuoso}\},$$

$$B = \{\text{segundo artículo no es defectuoso}\}.$$

Si suponemos que el primer artículo se sustituye antes de elegir el segundo, entonces se puede suponer que los eventos A y B son independientes y, por tanto, $P(A \cap B) = (0.9)(0.9) = 0.81$. Sin embargo, en forma más real, el segundo artículo se escoge sin sustituir el primero. En este caso,

$$P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A) = \tfrac{8999}{9999}(0.9)$$

que es aproximadamente 0.81. Así, aunque A y B no son independientes en el segundo caso, la suposición de independencia que simplifica en forma considerable los cálculos sólo causa un error despreciable. (Recuerde el objetivo de un modelo matemático como el que se describió en la sección 1.1.) Si hubieran existido sólo pocos artículos en el lote, digamos 30, la suposición de independencia habría producido un gran error. Por esto es importante verificar con cuidado las condiciones en las cuales se realiza el experimento, a fin de establecer la validez de la suposición de independencia entre varios eventos.

EJEMPLO 3.9. Supóngase que un mecanismo está formado por dos componentes acoplados en serie, como se indica en la figura 3.4. Cada uno de ellos tiene una probabilidad p de no funcionar. ¿Cuál es la probabilidad de que el mecanismo funcione?

FIGURA 3.4

Es evidente que el mecanismo funcionará si y sólo si *ambos* componentes funcionan. Por tanto,

$$\text{Prob. (mecanismo funcione)} = \text{Prob. } (C_1 \text{ funcione y } C_2 \text{ funcione}).$$

La información que hemos dado no nos permite seguir, a menos que sepamos (o supongamos) que los dos mecanismos trabajan de manera independiente. Esta puede o no ser una suposición realista, que depende de cómo se acoplan las dos partes. Si suponemos que los dos mecanismos trabajan independientemente, para la probabilidad pedida obtenemos $(1-p)^2$.

Para nosotros será muy importante extender la noción de independencia a más de dos eventos. Consideremos primero tres eventos asociados con un experimento, digamos: A, B y C. Si A y B, A y C y B y C son *mutuamente* independientes (en el sentido antes dado), entonces no se deduce, en general, que no haya dependencia entre los tres eventos A, B y C. El siguiente ejemplo (algo artificial) ilustra este punto.

EJEMPLO 3.10. Supongamos que lanzamos dos dados. Definamos los eventos A, B y C como sigue:

$A = \{$el primer dado muestra un número par$\}$,

$B = \{$el segundo dado muestra un número impar$\}$,

$C = \{$ambos dados muestran números pares o números impares$\}$.

Tenemos $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$. Aún más, $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}$. Por lo tanto, los tres eventos son mutuamente independientes. Sin embargo, $P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A)P(B)P(C)$. Este ejemplo motiva la siguiente definición.

Definición. Decimos que los tres eventos, A, B y C, son *mutuamente independientes* si y sólo si *todas* las condiciones siguientes se mantienen:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B), \quad P(A \cap C) = P(A)P(C),$$
$$P(B \cap C) = P(B)P(C), \quad P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C). \tag{3.7}$$

Finalmente generalizaremos esta noción a n eventos en la siguiente definición.

Definición. Los n eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son mutuamente independientes si y sólo si tenemos para $k = 2, 3, \ldots, n$,

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}). \tag{3.8}$$

(Hay $2^n - n - 1$ condiciones juntas anotadas; véase el Prob. 3.18.)

Observación: En la mayor parte de las aplicaciones no necesitamos verificar todas estas condiciones, ya que en general *suponemos* la independencia (con base en lo que sabemos acerca del experimento). Nosotros entonces usamos esta suposición para calcular, digamos: $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})$ como $P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$.

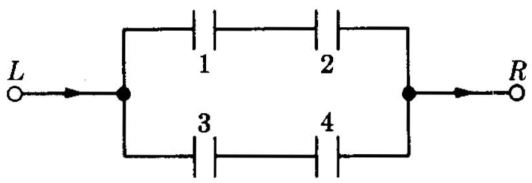


FIGURA 3.5

EJEMPLO 3.11. La probabilidad de cerrar cada uno de los relevadores del circuito que se indica en la figura 3.5 está dada por p. Si todos los relevadores funcionan independientemente, ¿cuál es la probabilidad de que exista una corriente en los terminales I y D?

Sea A_i el evento que representa {relevador i está cerrado}, $i = 1, 2, 3, 4$. Sea E el evento que representa {la corriente pasa de I a D}. Por tanto, $E = (A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4)$. (Note que $A_1 \cap A_2$ y $A_3 \cap A_4$ *no* son mutuamente excluyentes.) Así,

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A_1 \cap A_2) + P(A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ &= p^2 + p^2 - p^4 = 2p^2 - p^4. \end{aligned}$$

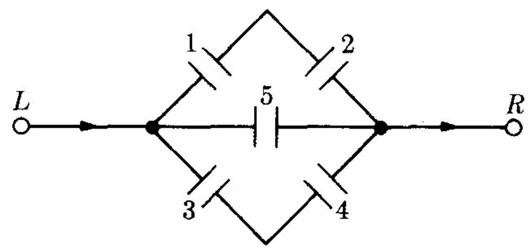


FIGURA 3.6

EJEMPLO 3.12. Supóngase otra vez que en el circuito de la figura 3.6 la probabilidad de que cada uno de los relevadores esté cerrado es p y que todos los relevadores funcionan independientemente. ¿Cuál es la probabilidad de que exista una corriente entre los terminales I y D?

Usando la misma notación como en el ejemplo 3.11, tenemos que

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A_1 \cap A_2) + P(A_5) + P(A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_5) \\ &\quad - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) - P(A_5 \cap A_3 \cap A_4) \\ &\quad + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \\ &= p^2 + p + p^2 - p^3 - p^4 - p^3 + p^5 = p + 2p^2 - 2p^3 - p^4 + p^5. \end{aligned}$$

Para cerrar este capítulo indiquemos una solución muy común, pero errónea, del problema.

EJEMPLO 3.13. Suponga que entre seis pernos, dos son más cortos que una longitud específica. Si se escogen dos pernos al azar, ¿cuál es la probabilidad de escoger los dos más cortos? Sea A_i el evento {el i-ésimo perno elegido es corto}, $i = 1, 2$.

Por lo tanto, queremos evaluar $P(A_1 \cap A_2)$. La solución correcta se obtiene, naturalmente, al escribir

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \mid A_1)P(A_1) = \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{2}{6} = \tfrac{1}{15}.$$

La solución común, pero *incorrecta,* es escribir:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2)P(A_1) = \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{2}{6} = \tfrac{1}{15}.$$

Por supuesto, lo importante es que aunque la respuesta es correcta, la identificación de $\frac{1}{5}$ con $P(A_2)$ es incorrecta; $\frac{1}{5}$ representa $P(A_2 \mid A_1)$. Para evaluar $P(A_2)$ en forma correcta, escribimos

$$P(A_2) = P(A_2 \mid A_1)P(A_1) + P(A_2 \mid A_1^c)P(A_1^c) = \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{2}{6} + \tfrac{2}{5} \cdot \tfrac{4}{6} = \tfrac{1}{3}.$$

3.4 Consideraciones esquemáticas; probabilidad condicional e independencia

La solución esquemática siguiente puede ser útil para comprender el concepto de probabilidad condicional. Supóngase que A y B son dos eventos asociados con un espacio muestral, para el cual las distintas probabilidades se indican en el diagrama de Venn que aparece en la figura 3.7.

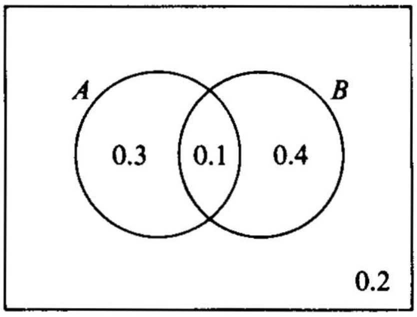


FIGURA 3.7

Por lo tanto, $P(A \cap B) = 0.1$, $P(A) = 0.1 + 0.3 = 0.4$ y $P(B) = 0.1 + 0.4 = 0.5$.

En seguida, representemos las diversas probabilidades con las *áreas* de los rectángulos como en la figura 3.8. En cada caso, las regiones sombreadas indican el evento B: en el rectángulo de la izquierda representamos $A \cap B$ y en el de la derecha $A' \cap B$.

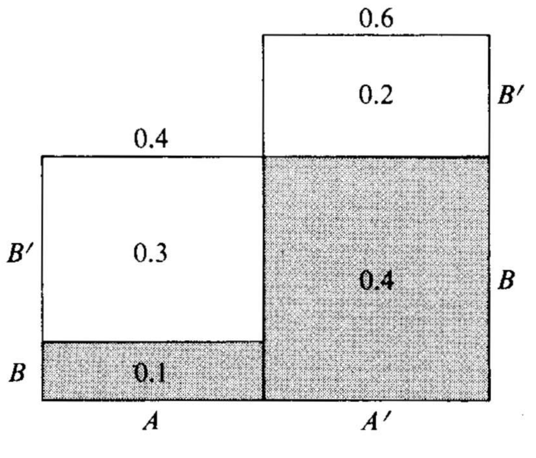


FIGURA 3.8

Supongamos ahora que deseamos calcular $P(B \mid A)$. Así sólo necesitamos considerar A; esto es, A' puede ignorarse en los cálculos. Notemos que la proporción de B en A es 1/4. (Esto lo podemos verificar también al aplicar la ecuación (3.1): $P(B \mid A) = P(A \cap B)/P(A) =$

$0.1/0.4 = 1/4$.) Por lo tanto, $P(B' \mid A) = 3/4$; el diagrama que representa esta probabilidad condicional se ilustra en la figura 3.9.

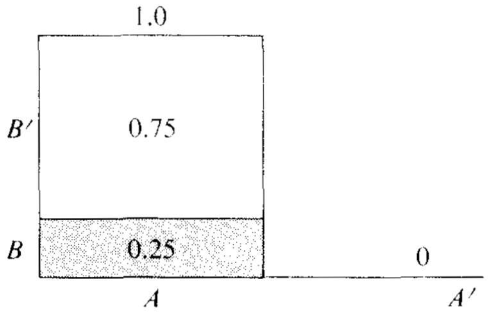


FIGURA 3.9

Nótese también que si A se da como ocurrido, todas las probabilidades (es decir, 1) se deben asociar con el evento A, mientras que ninguna de las probabilidades (es decir, 0) está asociada con A'. Aún más, nótese que en el rectángulo izquierdo, que representa A, sólo las colocaciones individuales han cambiado de la figura 3.8 a la figura 3.9 (sumando 1 en vez de 0.4). Sin embargo, las proporciones dentro del rectángulo permanecen iguales (es decir, 3:1).

Ilustremos la noción de independencia usando el procedimiento esquemático presentado anteriormente. Supóngase que los eventos A y B se dibujan en la figura 3.10. En ese caso, las proporciones en los dos rectángulos, que representan A y A', son las *mismas*: 3:1 en ambos casos. Así tenemos $P(B) = 0.1 + 0.15 = 0.25$, y $P(B \cap A) = 0.1/0.4 = 0.25$.

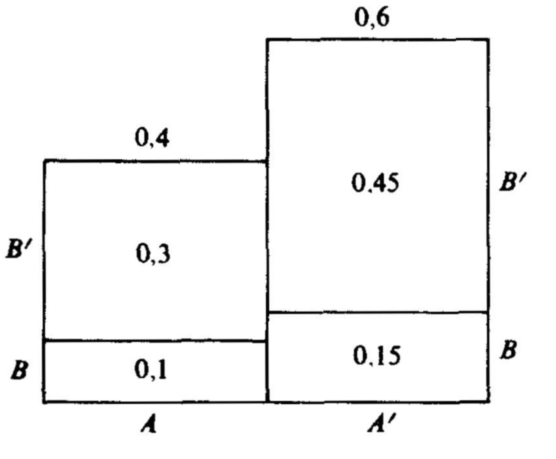


FIGURA 3.10

Finalmente, por simple inspección de la figura 3.8 podemos calcular las otras probabilidades condicionales:

$P(A \mid B) = 1/5$ (puesto que 1/5 del área total rectangular que representa B está ocupada por A),

$P(A' \mid B) = 4/5$.

PROBLEMAS

3.1. La urna 1 contiene x esferas blancas y y rojas. La urna 2 contiene z esferas blancas y v rojas. Se escoge una esfera al azar de la urna 1 y se pone en la urna 2. *Entonces* se escoge una esfera al azar de la urna 2. ¿Cuál es la probabilidad de que esta esfera sea blanca?

3.2. Dos tubos defectuosos se confunden con dos buenos. Los tubos se prueban, uno por uno, hasta encontrar los defectuosos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el último tubo defectuoso en la segunda prueba?
b) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el último tubo defectuoso en la tercera prueba?
c) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el último tubo defectuoso en la cuarta prueba?
d) Sumar los números obtenidos en *a*), *b*) y *c*). ¿Es sorprendente el resultado?

3.3. Una caja contiene 4 tubos malos y 6 buenos. Se sacan dos a la vez. Se prueba uno de ellos y se encuentra que es bueno. ¿Cuál es la probabilidad de que el otro también sea bueno?

3.4. En el problema anterior los tubos se verifican sacando uno al azar, se prueba y se repite el proceso hasta que se encuentran los cuatro tubos malos. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el cuarto tubo malo

a) en la quinta prueba?
b) en la décima prueba?

3.5. Supóngase que A y B son dos eventos independientes asociados con un experimento. Si la probabilidad de que A o B ocurra es igual a 0.6, mientras que la probabilidad de que A ocurra es igual a 0.4, determinar la probabilidad de que B ocurra.

3.6. Veinte artículos, 12 de los cuales son defectuosos y 8 no defectuosos, se inspeccionan uno después de otro. Si esos artículos se escogen al azar, ¿cuál es la probabilidad de que:

a) los dos primeros artículos inspeccionados sean defectuosos?
b) los dos primeros artículos inspeccionados sean no defectuosos?
c) entre los dos primeros artículos inspeccionados haya uno defectuoso y uno no defectuoso?

3.7. Supóngase que tenemos 2 urnas, 1 y 2, cada una con dos cajones. La urna 1 tiene una moneda de oro en un cajón y una de plata en el otro, mientras que la urna 2 tiene una moneda de oro en cada uno de los cajones. Se escoge una urna al azar, y de ésta se escoge un cajón al azar. La moneda que se encontró en este cajón es de oro. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda provenga de la urna 2?

3.8. Un bolso contiene tres monedas, una de las cuales está acuñada con dos caras, mientras que las otras dos monedas son normales y no son irregulares. Se escoge una moneda al azar y se lanza cuatro veces en forma sucesiva. Si *cada* vez sale cara, ¿cuál es la probabilidad de que ésta sea la moneda con dos caras?

3.9. En una fábrica de pernos, las máquinas A, B y C fabrican 25, 35 y 40% de la producción total, respectivamente. De lo que producen, 5, 4 y 2% respectivamente, son pernos defectuosos. Se escoge un perno al azar y resulta ser defectuoso. ¿cuáles son las probabilidades respectivas de que el perno provenga de la máquina A, B o C?

3.10. Sean A y B dos eventos asociados con un experimento. Supóngase que $P(A) = 0.4$, mientras que $P(A \cup B) = 0.7$. Sea $P(B) = p$.

a) ¿Para qué elección de p son A y B mutuamente excluyentes?
b) ¿Para qué elección de p son A y B independientes?

3.11. Tres componentes de un mecanismo, digamos C_1, C_2 y C_3 están colocados en serie (en una línea recta). Supóngase que esos mecanismos están agrupados en orden aleatorio. Sea R el evento $\{C_2$ está a la derecha de $C_1\}$, y S el evento $\{C_3$ está a la derecha de $C_1\}$. ¿Los eventos R y S son independientes? ¿Por qué?

3.12. Se lanza un dado y de manera independiente se escoge al azar una carta de una baraja normal. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) el dado muestre un número par y la carta sea de un palo rojo?
b) el dado muestre un número par o la carta sea de un palo rojo?

3.13. Un número binario está compuesto sólo de los dígitos 0 y 1. (Por ejemplo, 1011, 1100, etc.) Esos números tienen un papel importante en el uso de los computadores electrónicos. Supóngase que un número binario está formado por n dígitos. Supóngase que la probabilidad de que aparezca un dígito incorrecto es p y que los errores en dígitos diferentes son independientes uno de otro. ¿Cuál es la probabilidad de formar un *número* incorrecto?

3.14. Se lanza un dado n veces. ¿Cuál es la probabilidad de que "6" salga al menos una vez en los n lanzamientos?

3.15. Dos personas lanzan tres monedas regulares cada una. ¿Cuál es la probabilidad de que obtengan el mismo número de caras?

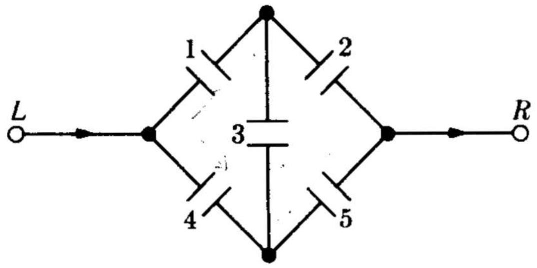
3.16. Se lanzan dos dados y puesto que las caras muestran números diferentes, ¿cuál es la probabilidad de que una cara sea 4?

3.17. En la fabricación de cierto artículo se presenta un tipo de defectos con una probabilidad de 0.1 y defectos de un segundo tipo con probabilidad de 0.05. (Se supone la independencia entre los tipos de defectos.) ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) un artículo no tenga ambas clases de defectos?
b) un artículo sea defectuoso?
c) suponiendo que un artículo sea defectuoso, tenga sólo un tipo de defecto?

3.18. Verificar que el número de condiciones indicadas en la ecuación (3.8) esté dado por $2^n - n - 1$.

3.19. Probar que si A y B son eventos independientes, también lo son A y B^c, A^c y B, A^c y B^c.



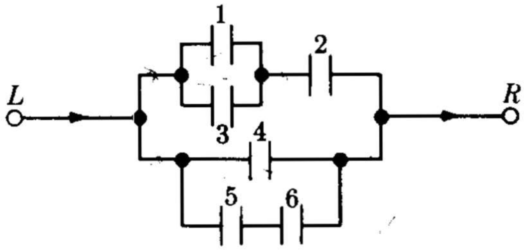


FIGURA 3.11

3.20. En la figura 3.11 *a*) y *b*) se supone que la probabilidad de que cada relevador esté cerrado es p y que cada relevador se abre o se cierra independientemente de cualquier otro. Encontrar en cada caso la probabilidad de que la corriente pase de I a D.

TABLA 3.2

Número de fallas	0	1	2	3	4	5	6
A	0.1	0.2	0.3	0.2	0.09	0.07	0.04
B	0.3	0.1	0.1	0.1	0.1	0.15	0.15

3.21. Dos máquinas, A, B, que se accionan independientemente pueden tener cierto número de fallas cada día. La tabla 3.2 da la distribución de probabilidades de las fallas de cada una. Calcular las siguientes probabilidades:

a) A y B tienen el mismo número de fallas.
b) El número de fallas es menor que cuatro; menor que cinco.
c) A tiene más fallas que B.
d) B tiene el doble de fallas que A.
e) B tiene cuatro fallas, cuando se sabe que B tiene por lo menos dos fallas.

f) El número mínimo de fallas de las dos máquinas es tres; es menor que tres.

g) El número máximo de fallas de las máquinas es tres; es más que tres.

3.22. Usando la ecuación (3.2), demostrar que para A fijo, $P(B \mid A)$ satisface los diversos postulados de la probabilidad.

3.23. Si cada uno de los elementos de un determinante de segundo orden es cero o uno, ¿cuál es la probabilidad de que el valor del determinante sea positivo? (Supóngase que las colocaciones individuales del determinante se escogen independientemente, considerando que cada uno de los valores tiene probabilidad $\frac{1}{2}$.)

3.24. Verificar que el teorema de la multiplicación $P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B)$, establecido para dos eventos, se puede generalizar para tres eventos como sigue:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \mid B \cap C)P(B \mid C)P(C).$$

3.25. Un conjunto electrónico consta de dos subsistemas, digamos A y B. A partir de una serie de pruebas previas, se presuponen las siguientes probabilidades:

$$P(A \text{ falle}) = 0.20,$$

$$P(B \textit{ sólo} \text{ falle}) = 0.15,$$

$$P(A \text{ y } B \text{ fallen}) = 0.15.$$

Calcular las probabilidades siguientes.

a) $P(A \text{ falle} \mid B \text{ haya fallado})$,

b) $P(A \text{ falle solamente})$.

3.26. Finalizar el análisis del ejemplo de la sección 3.2 decidiendo cuál de los tipos de cajas de caramelos, A o B, es el escogido con base en el conocimiento de dos caramelos que fueron muestreados.

3.27. Cada vez que se realiza un experimento, la ocurrencia de un evento particular A es igual a 0.2. El experimento se repite, independientemente, hasta que A ocurre. Calcular la probabilidad de que sea necesario ejecutar un cuarto experimento.

3.28. Supóngase que un mecanismo tiene N tubos y que todos son necesarios para su funcionamiento. Para localizar el tubo que funciona mal, se reemplaza sucesivamente cada uno de ellos por uno nuevo. Calcular la probabilidad de que sea necesario verificar N tubos si la probabilidad (constante) de que un tubo esté dañado es p.

3.29. Probar: Si $P(A \mid B) > P(A)$, entonces $P(B \mid A) > P(B)$.

3.30. Un tubo al vacío puede provenir de cualquiera de tres fabricantes con probabilidades $p_1 = 0.25$, $p_2 = 0.50$ y $p_3 = 0.25$. Las probabilidades de que el tubo funcione correctamente durante un periodo de tiempo especificado son iguales a 0.1, 0.2 y 0.4, respectivamente, para los tres fabricantes. Calcular la probabilidad de que un tubo elegido al azar funcione durante el periodo de tiempo especificado.

3.31. Un sistema eléctrico consta de dos interruptores del tipo A, uno del tipo B y cuatro del tipo C conectados como aparece en la figura 3.12. Calcular la probabilidad de que no se pueda eliminar una falla en el circuito con la llave K, si los interruptores A, B y C están abiertos (es decir, fuera de servicio) con probabilidades 0.3, 0.4, 0.2, respectivamente, y si ellos funcionan de manera independiente.

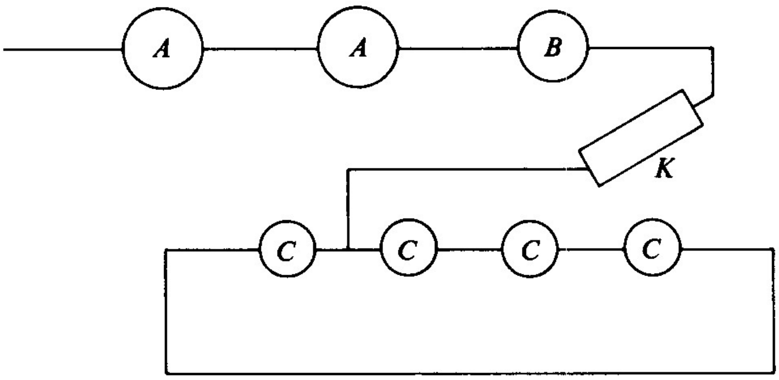


FIGURA 3.12

3.32. La probabilidad de que un sistema se sobrecargue es 0.4 durante cada conjunto de ensayos de un experimento. Calcular la probabilidad de que el sistema deje de funcionar en tres ensayos independientes del experimento, si las probabilidades de fallar en 1, 2 o 3 ensayos son iguales a 0.2, 0.5 y 0.8, respectivamente.

3.33. Se emiten sucesivamente cuatro señales de radio. Si la recepción de cualquier señal es independiente de la recepción de otra y estas probabilidades son 0.1, 0.2, 0.3, y 0.4, respectivamente, calcular la probabilidad de que la señal k se reciba por $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

3.34. Un aficionado usa el siguiente sistema bastante simple para pronosticar el tiempo atmosférico. Clasifica cada día como "seco" o "mojado" y supone que la probabilidad de que cualquier día dado sea igual al precedente está dada por una constante $p(0 < p < 1)$. Con base en anotaciones anteriores, se supone que el 1o. de enero tiene una probabilidad β de ser "seco". Suponiendo que $\beta_n =$

probabilidad (el n-ésimo día del año es "seco"), obtener una expresión para β_n en función de β y p. Evaluar también $\lim_{n\to\infty}\beta_n$ e interpretar su resultado. (*Sugerencia*: Expresar β_n en función de β_{n-1}).

3.35. En una ciudad se publican los periódicos A, B y C. Una encuesta reciente de lectores indica lo siguiente: 20% lee A, 16% lee B, 14% lee C, 8% lee A y B, 5% lee A y C, 2% lee A, B y C, y 4% lee B y C. Para un adulto escogido al azar, calcular la probabilidad de que *a*) no lea ninguno de los periódicos, *b*) lea exactamente uno de los periódicos, *c*) lea al menos A y B si se sabe que lee al menos uno de los periódicos.

3.36. Una moneda normal se lanza $2n$ veces.

a) Obtener la probabilidad de que haya un número igual de caras y sellos.

b) Mostrar que la probabilidad calculada en *a*) es una función decreciente de n.

3.37. Cada una de las urna 1, urna 2,..., urna n contiene α esferas blancas y β esferas negras. Se pasa una esfera de la urna 1 a la urna 2 y *luego* se pasa una de la urna 2 a la urna 3, etc. Finalmente, se escoge una esfera de la urna n. Si la primera esfera que se pasó era blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la última esfera elegida sea blanca? ¿Qué sucede cuando $n \to \infty$? [*Sugerencia:* Sea p_n = Prob (n-ésima esfera pasada sea blanca) y expresar p_n en términos de p_{n-1}.]

3.38. La urna 1 contiene α esferas blancas y β esferas negras, mientras que la urna 2 contiene β esferas blancas y α esferas negras. Se escoge una esfera (de una de las urnas) y luego se devuelve a esa urna. Si la esfera elegida es blanca, la siguiente se escoge de la urna 1; si la esfera elegida es negra, la siguiente se escoge de la urna 2. Continuar de esta manera. Dado que la primera esfera escogida proviene de la urna 1, obtener Prob (n-ésima esfera escogida sea blanca) y también el límite de esta probabilidad cuando $n \to \infty$.

3.39. Una máquina puede imprimir n "letras", digamos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Esta máquina opera por impulsos eléctricos y cada letra se produce por un impulso *diferente*. Supóngase que exista una probabilidad constante p de imprimir la letra correcta y también supóngase independencia. Uno de los n impulsos, elegido al azar, alimentó la máquina dos veces y las dos veces se imprimió la letra α_1. Calcular la probabilidad de que el impulso escogido estuviese proyectado para imprimir α_1.